UNIVERSIDAD DE ALCALÁ

Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica

LA ABSTENCIÓN Y OTROS PROBLEMAS EN LOS MÉTODOS DE VOTACIÓN

TESIS DOCTORAL

Estefanía García Vázquez

Directores: *Joaquín Pérez Navarro*
José Luis Jimeno Pastor

Alcalá de Henares, 2009

Universidad de Alcalá

DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA
Plaza de la Victoria
28802 Alcalá de Henares (Madrid)
Teléfonos: 91 885 42 02 / 51 54
Fax: 91 885 42 39
dpto.economia@uah.es

Dr. D. Joaquín Pérez Navarro, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica de la Universidad de Alcalá, y

Dr. D. José Luis Jimeno Pastor, Profesor Titular de Escuela Universitaria del Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica de la Universidad de Alcalá

CERTIFICAN que:

La Tesis Doctoral titulada **"La abstención y otros problemas en los métodos de votación"** elaborada por D.ª Estefanía García Vázquez, ha sido dirigida por ambos y reúne los requisitos exigidos para proceder a su defensa y aprobación de acuerdo con la normativa vigente.

Y para que conste a los efectos oportunos, firmo el presente certificado en Alcalá de Henares, a 29 de enero de 2009.

D. Joaquín Pérez Navarro
Codirector de la Tesis Doctoral

D. José Luis Jimeno Pastor
Codirector de la Tesis Doctoral

Universidad
de Alcalá

DEPARTAMENTO DE
FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA
E HISTORIA ECONÓMICA
Plaza de la Victoria
28802 Alcalá de Henares (Madrid)
Teléfonos: 91 885 42 02 / 51 54
Fax: 91 885 42 39
dpto.economia@uah.es

Dr. D. Diego Azqueta Oyarzun, Director del Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica de la Universidad de Alcalá

CERTIFICA que:

La Tesis Doctoral titulada **"La abstención y otros problemas de los métodos de votación"** elaborada por D.ª Estefanía García Vázquez, reúne los requisitos exigidos para proceder a su defensa y aprobación de acuerdo con la normativa vigente.

Y para que conste a los efectos oportunos, firmo el presente certificado en Alcalá de Henares, a 29 de enero de 2009.

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ · Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica

D. Diego Azqueta Oyarzun
Director del Dpto. de Fundamentos
de Economía e Historia Económica.

AGRADECIMIENTOS

Quizás me equivoque y yo sea especial, pero me cuesta creer que esta parte no resulte una de las más difíciles de escribir en una Tesis. Primero, porque seguramente será la más leída. Segundo, porque en este momento no sé si ya me queda cerebro para solucionar un problema más: encontrar las palabras exactas pero, sobre todo, lo suficientemente expresivas sin caer en excesos, para transmitir mi sincero y profundo agradecimiento hacia todos lo que, de un modo u otro, han hecho posible la materialización de este trabajo. Y tercero, porque en mi caso, puede que además olvide a alguien y lo lamente eternamente.

En lo que sí ya no creo estar errada, es que es de lo más paradójico (no quería obviar esta palabra que tanto peso tiene en mi investigación) que sea precisamente al final, cuando ya no quedan fuerzas, cuando escribes las palabras sin las que todas las demás nunca hubieran existido.

Sea como sea, lo que no quiero, bajo ninguna circunstancia, y es realmente importante para mí, es que lo que viene a continuación sea considerado como una simple formalidad para cubrir un requisito impuesto por la costumbre, sino que espero se entienda como lo que de verdad es, el más intenso sentimiento de reconocimiento y afecto a las personas que voy a nombrar.

Por supuesto, y aunque sólo puede expresarse con pobreza en unas líneas de texto, el primer y principal agradecimiento va dirigido, no a mi director sino, para mi gran suerte, mis dos directores, Joaquín Pérez Navarro y José Luis Jimeno Pastor quienes, a pesar de sus otras muchas ocupaciones y dificultades, se comprometieron conmigo desde el principio trabajando incansablemente para sacar esta Tesis adelante. Gracias por vuestras enseñanzas, por vuestro ejemplo, por vuestro apoyo, por confiar en mí y, sobre todo, por vuestra paciencia, espero que, al menos, en algunas ocasiones también disfrutarais con ello.

A Ethel Mokotoff Miguel, ya no tanto por su ayuda en este trabajo sino, sobre todo porque, con su conocimiento o no, me empujó a entrar en esta Universidad y aquí, incluso para mi propia sorpresa inicial, he encontrado el sitio donde quiero quedarme.

A Sergio Barba-Romero Casillas, porque desde el principio ha mostrando su interés y ha estado ahí en momentos importantes allanando mi camino en esta Facultad.

A José Manuel Maneiro Jurjo, porque coincidimos incluso antes de saberlo, porque hemos compartido muchos años por estos mismos pasillos y, más aún, porque espero que sigamos haciéndolo.

A todo el Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica, por ser el mío y por permitirme realizar el trabajo en un ambiente tan constructivo y agradable.

Hasta aquí, los que han contribuido tanto afectiva como académicamente pero, igualmente importantes, claro, han sido todos los demás que, injustamente, han estado obligados a aguantarme durante todo el tiempo en que el largo proceso de elaboración de esta Tesis se ha demorado. Afortunadamente, para ellos cuento con la ventaja de que muchos, que deberían estar aquí expresamente, jamás leerán lo que sigue y, siendo así, me tomaré la libertad de "resumirlos". Sé que, como familiares y amigos míos que sois, la infinita comprensión está entre vuestros muchos atributos.

Por estricto orden alfabético, mis queridas e irremplazables Alicia (GSP), Oliva (MAA) y Patricia (EPB). Ellas saben porqué, así que me perdonarán que no me extienda más.

Y por si algunos advierten en todo lo anterior un exceso de informalidad y subjetividad, tan en contraste con todo lo que sigue, una última frase: "Si me hubieran hecho objeto sería objetivo, pero me hicieron sujeto". José Bergamín.

A ellas, Lola y Natalia, por supuesto…y a ti papá, donde quiera que estés.

ÍNDICE

SUMMARY

In voting methods, as in many situations in real life, we are confronted sometimes with paradoxical situations, as the ones described below:

A voter causes a voting outcome that is worse (for that voter) that the one that had been obtained if he or she had abstained.

One candidate loses the election despite the fact that one of more voters chose not to abstain and vote in his or her favour

What happens in either of these situations is obviously surprising and is called the Abstention Paradox. Some voting methods are affected somehow by this paradox, while others satisfy a property called Participation, which makes them immune to the paradox. It is very important to find out what methods are affected and to what extent, by this paradox.

The main objective of this work is to explore and study the Abstention Paradox in voting methods, that is to say, the Participation properties of those methods. This study includes the definition of new concepts and new Participation properties. It also includes the extension or generalization of some important results appeared in the literature on this paradox, and, particularly, affects the Condorcet voting methods, such as the Moulin and Young and Levenglick theorems.

A further objective is to compare the performance, with respect to this paradox, that Condorcet and Positional methods display, and build a Generating Scheme based on distances from which a family of voting methods with good performance is obtained.

Describing with more detail the intended objectives, this work aims:

a) To contribute to the extension of the Moulin theorem (which states that any Condorcet voting function fails to satisfy the Participation property) to the context of voting correspondences. To achieve this target, we will define new Participation properties and identify which Condorcet voting correspondences fail to satisfy these properties.

b) To contribute to the extension of the Moulin theorem to the context of *k*-voting functions and *k*-voting correspondence. To achieve this, we will adapt the concepts involved in the Moulin theorem (including Condorcet candidate) to this new context.

c) To contribute to the expansion and deepening of the concept of Positive Involvement, defining more demanding Participation properties and identifying what voting correspondences, both Positional and Condorcet, violate these properties.

d) To contribute to the generalization of Young and Levenglick theorem, which states that all Condorcet voting correspondences fail to satisfy the Consistency property. To achieve this, we will identify and explore the properties that are somewhere in between Consistency property and Positive Involvement property.

e) To contribute to a better understanding of the relationships and differences between Condorcet and Positional methods, building a Generating Scheme based on distances defined over preference matrices, and obtaining from it a single parameter family of methods which all have, even if they are Condorcet, the best possible Participation properties.

Content of Chapters

Chapter 1, entitled “*The Preference Aggregation Problem*” (El Problema de la Agregación de Preferencias), provides an introduction to the Voting Theory through some examples from recent real-life situations, indicating two of the possible approaches to analysis preference aggregation procedures, arising from some of the two impossibility results whose relevance has determined the development of the theory almost from his beginning: the Arrow and the Gibbard-Satterthwaite Theorems.

In Chapter 2, entitled “*Voting Methods, Properties and Analysis Tools*” (Métodos de Votación, Propiedades y Herramientas de Análisis), I already present the principal definitions, assumptions and, in general, the basic terminology used in this Thesis, in addition to the classification and definition of some of the most well-known voting methods of each families considered: Positional and Condorcet Methods. Next, some of the key properties based on individual rationality, Monotonicity and Participation appear. As it regards the latter property, which is the principal one in this work, and preparing the results of Chapter 3, the Moulin Theorem is defined and the need to extend the voter preferences on individual alternatives to sets of alternatives arises, since, in the context of voting correspondence, the voting outcomes are sets of candidates. To that end, the definition of the principal orders between sets is shown, and so are the relations and fundamental implications that exist between them.

Chapter 3, entitled “*Participation in Voting Correspondences*” (Participación en Correspondencias de Votación), deals with the deep analysis of the issue of Participation in the general context of voting correspondences looking for an extension of the Moulin Theorem to Condorcet voting correspondences. First of all, there are defined the different Participation properties in the new context establishing, in turn, the principal logical relations between them. Then, two important results are described, an impossibility theorem that is an extension of that of Moulin to voting correspondences for two concrete preference orders between sets (Optimist and Pessimist), and a possibility theorem that shows Condorcet correspondence that is free of the paradox for another concrete order (LexiMaxMin). The latter result will allow setting the limits of the desired extension of the Moulin theorem. Big part of the results of this chapter appears in Jimeno et al (2008).

Chapter 4, entitled "*Other Participation Extensions*" (Otras Extensiones de Participación) deals, in turn, with three main issues. First, to find out if, based on the relationship between the different Participation properties defined in the previous chapter, it is possible to get, for Condorcet voting correspondences, a new impossibility result that extends further the results already obtained, or a new possibility result that bound them. Likewise, it explores the incidence, although not in an exhaustive way, both within the proper family of Condorcet voting correspondences, and in the family of Positional voting correspondences, of the fulfilment and failure of the different Participation properties defined.

Secondly, it addresses the task of extending the Moulin theorem to the scope of *k*-functions (rules that necessarily choose a set with *k* winners) and *k*-correspondences (rules that select a non-empty family of sets with *k* winners).

Finally, the chapter concludes with an analysis of the External Consistency properties, some of whose versions are directly related to the Positive Involvement property, and the possibility of extending the Young and Levenglick Theorem about the failure of Young External Consistency by all Condorcet voting correspondences.

Finally, Chapter 5, entitled "A Generating Scheme of Voting Methods" (Un Esquema Generador de Métodos de Votación), presents and exhibits a Generating Structure based on distances defined over preference matrices, which highlights the similarities underlying most of the voting methods, thus contributing to a better understanding of the algorithms that define them. A single parameter family of methods is obtained, from this structure, which includes Positional methods as Borda and Condorcet methods as MaxMin. They all share certain Participation properties.

PRESENTACIÓN

Algunos procedimientos de agregación de preferencias, y en particular algunos métodos de votación, tienen la sorprendente característica de que, al utilizarlos, puede presentarse el caso siguiente:

> Un votante provoca, con su voto, un resultado final de la votación peor (para dicho votante) que si se hubiera abstenido.

En ocasiones, la situación puede describirse así:

> Un candidato deja de ser ganador de una votación como consecuencia de que uno o varios votantes, en lugar de abstenerse, voten de manera favorable a dicho candidato.

Lo ocurrido en cualquiera de estas dos situaciones es evidentemente paradójico y recibe el nombre de Paradoja de la Abstención. Algunos métodos de votación están afectados de algún modo por esta paradoja, mientras que otros satisfacen una propiedad, llamada de Participación, que les hace inmunes a la paradoja. Es pues de gran importancia averiguar qué métodos resultan afectados, y en qué grado, por esta paradoja.

El objetivo principal de este trabajo es la exploración y estudio de la Paradoja de la Abstención en los métodos de votación, es decir, de las propiedades de Participación de dichos métodos. En este estudio se incluyen la definición de nuevos conceptos y de nuevas propiedades de Participación, y la extensión o generalización de algunos resultados importantes aparecidos en la literatura referentes a dicha paradoja, y que afectan en especial a los métodos de votación Condorcet, como los teoremas de Moulin y de Young y Levenglick

Un objetivo adicional es comparar el rendimiento que, con respecto a esta paradoja, exhiben los métodos Condorcet y los métodos Posicionales, y construir una Estructura Generadora basada en distancias, obteniendo a partir de ella una familia de métodos con buen rendimiento.

Describiendo con algo más de detalle los objetivos perseguidos, podemos decir que este trabajo pretende:

a) Contribuir a la extensión del teorema de Moulin (que establece que toda función de votación Condorcet incumple la propiedad de Participación) al contexto de las correspondencias de votación. Para conseguirlo, se intentan definir nuevas propiedades de Participación e identificar qué correspondencias Condorcet incumplen dichas propiedades.

b) Contribuir a la extensión del teorema de Moulin al contexto de las *k*-funciones de votación y al contexto de las *k*-correspondencias de votación. Para conseguirlo, se intentan adaptar los conceptos que intervenían en el teorema de Moulin (entre ellos el de candidato Condorcet) a este nuevo contexto.

c) Contribuir a la extensión y profundización del concepto de Participación Positiva, definiendo propiedades de Participación más exigentes que ésta e identificando qué correspondencias, tanto Posicionales como Condorcet, incumplen dichas propiedades.

d) Contribuir a la generalización del teorema de Young y Levenglick, que establece que toda correspondencia de votación Condorcet incumple la propiedad de Consistencia. Para ello, se intentan definir y explorar las propiedades que se encuentran a medio camino entre la propiedad de Consistencia y la propiedad de Participación Positiva.

e) Contribuir a una mayor comprensión de las relaciones y de las diferencias entre los métodos Condorcet y los métodos Posicionales, construyendo una Estructura Generadora basada en distancias definidas sobre la matriz de preferencias, y definiendo a partir de ella una familia uniparamétrica de métodos en la cual todos tengan, aun cuando sean Condorcet, las mejores propiedades posibles de Participación.

Contenido de los Capítulos

El Capítulo 1, titulado "*El Problema de la Agregación de las Preferencias*", plantea una introducción a la Teoría de las Votaciones a partir de ejemplos tomados de situaciones reales recientes, señalando dos de las posibles aproximaciones a su análisis como procedimientos de agregación de preferencias, que se derivan de algún modo de los dos resultados de imposibilidad cuya relevancia ha condicionado el desarrollo de la teoría prácticamente desde su inicio: el Teorema de de Arrow y el Teorema de Gibbard-Satterthwaite.

En el Capítulo 2, titulado "*Métodos de Votación, Propiedades y Herramientas de Análisis*", se introducen ya las principales definiciones, supuestos y, en general, la terminología básica utilizada en esta Tesis, además de la clasificación y definición de algunos de los métodos de votación más conocidos de cada una de las familias consideradas: métodos Posicionales y métodos Condorcet. A continuación, se presentan algunas de las principales propiedades basadas en la racionalidad individual, Monotonía y Participación. En relación a esta última propiedad, que es la principal en este trabajo, y en preparación de los resultados del Capítulo 3, se presenta el Teorema de Moulin y se plantea la necesidad de extender las preferencias de un votante sobre alternativas individuales a conjuntos de alternativas, ya que, en el contexto de las correspondencias de votación, los resultados de la votación son conjuntos de candidatos. Para ello, se presenta la definición de los principales órdenes entre conjuntos, y las relaciones e implicaciones fundamentales que existen entre ellos.

En el Capítulo 3, titulado "*Participación en Correspondencias de Votación*", se aborda el análisis en profundidad de la problemática de la Participación en el ámbito general de las correspondencias de votación, en la búsqueda de una extensión del Teorema de Moulin a correspondencias de votación Condorcet. En primer lugar, se definen las distintas propiedades de Participación en el nuevo contexto estableciendo, a su vez, las principales relaciones lógicas entre ellas. Se describen dos resultados importantes, un teorema de imposibilidad que es una extensión del de Moulin a correspondencias de votación para dos órdenes concretos de preferencias entre conjuntos (Optimista y Pesimista), y un teorema de posibilidad que muestra una correspondencia Condorcet que sí está libre de la paradoja para otro orden concreto (LexiMaxMin). Este último resultado permitirá fijar los límites de la extensión buscada del

Teorema de Moulin. Gran parte de los resultados de este capítulo aparecen en Jimeno et al (2008).

El Capítulo 4, titulado "O*tras Extensiones de Participación*" trata, por su parte, tres cuestiones principales. La primera, averiguar si, a partir de las relación entre las distintas propiedades de Participación establecidas en el capítulo anterior, es posible obtener, para las correspondencias de votación Condorcet, bien un nuevo resultado de imposibilidad que extienda aún más los resultados allí obtenidos, bien un nuevo resultado de posibilidad que los acote. Así mismo, explora la incidencia, aunque de un modo no exhaustivo, tanto en la propia familia de las correspondencias de votación Condorcet, como en la familia de las correspondencias de votación Posicionales, del cumplimiento e incumplimiento de las distintas propiedades de Participación definidas.

En segundo lugar, se aborda la tarea de extender el Teorema de Moulin al ámbito de las *k*-funciones (reglas que eligen necesariamente un conjunto con *k* ganadores) y al ámbito de las *k*-correspondencias (reglas que eligen una familia no vacía de conjuntos con *k* ganadores).

Para finalizar, el capítulo concluye con un análisis de las propiedades de Consistencia Externa, algunas de cuyas versiones se encuentran directamente relacionadas con la propiedad de Participación Positiva, y la posibilidad de extender el Teorema de Young y Levenglick (1978) sobre el incumplimiento de dicha propiedad por todas las correspondencias de votación Condorcet.

Finalmente, el Capítulo 5, que lleva por título "*Un Esquema Generador de Métodos de Votación*", presenta y expone una Estructura Generadora basada en distancias definidas sobre la matriz de preferencias, donde se ponen de manifiesto las similitudes subyacentes a gran parte de los distintos métodos conocidos, intentando así contribuir a un mejor entendimiento de los algoritmos que los definen. Se obtiene, a partir de esta estructura, una familia uniparamétrica de métodos de la que forman parte métodos posicionales como Borda y métodos Condorcet, como MaxMin. Todos comparten ciertas propiedades de Participación.

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE LA AGREGACIÓN DE LAS PREFERENCIAS

1.1. Introducción.

El objetivo de este capítulo introductorio es presentar una visión general del problema de la agregación de las preferencias encuadrado en el marco general de la Teoría de la Elección Social y, más en concreto, en el análisis de los Métodos de Votación.

El capítulo aborda en la Sección 1.2 una breve introducción al objeto de estudio mediante algunos ejemplos tomados de la realidad, y continúa en la Sección 1.3 con la presentación de dos de los posibles enfoques en que pueden abordarse los problemas de Elección Social: agregación directa e indirecta de las preferencias, presentando en cada uno de ellos los principales resultados de imposibilidad que han marcado en gran medida su desarrollo posterior para, a continuación, resaltar en cada una de ellas las principales investigaciones que, en particular y en relación al análisis de los métodos de votación, se han llevado a cabo con el objetivo de superar o extender esos resultados iniciales. Finalmente, en la Sección 1.4 se realizan algunos comentarios finales y se plantean algunas cuestiones adicionales.

1.2. Elección Social.

El objeto básico de la Teoría de la Elección Social es tratar de responder a la pregunta general de si es posible alcanzar y de qué modo decisiones sociales o colectivas, a partir de la diversidad de preferencias y preocupaciones de los distintos individuos involucrados.

Dicho de otro modo, la Teoría de la Elección Social centra su interés en la obtención de reglas que produzcan un resultado social común a partir de preferencias individuales lo cual, en esencia, constituye un problema de la agregación de esas preferencias y, como tal, supone la inclusión, dentro de su espacioso marco, de multitud de problemas que comparten esa característica de relacionar evaluaciones sociales y decisiones de grupo, con las opiniones e intereses de los individuos que conforman dicha sociedad o grupo.

En este sentido, y dada la infinidad de posibles procesos de agregación, en su dominio de aplicaciones potenciales se incluye, desde normas de justicia distributiva relevantes para la economía del bienestar y la economía pública, hasta el estudio de los sistemas de votación adecuados a, por ejemplo, unas elecciones generales o un comité. Es este último punto, el análisis de los métodos de votación, el que constituye el eje central de esta investigación.

Más en concreto, si está claro que la Democracia es el gobierno de la gente. ¿Cómo tomar decisiones en Democracia?, ¿cómo agregar las preferencias individuales en un resultado común? Parece indiscutible que, si sólo existen dos alternativas, aquella que consiga una mayoría de apoyos debería ser la elegida. Ahora bien, cuando existen más de dos opciones puede que ninguna obtenga más de la mitad de votos, ¿qué método de votación es entonces el más adecuado? Aún más, una vez decidido el método de votación a utilizar en una determinada situación, ¿son los votantes conscientes de los posibles fallos o problemas que puede presentar el resultado obtenido? como, por ejemplo, el hecho de no elegir un resultado preferido por la mayoría de los votantes.

Como Riker (1982, pag. 12) dice: *"En muchos casos no tenemos evidencia de los defectos de la votación. Cuando unas elecciones generales o un procedimiento de decisión de un comité obtienen un determinado resultado, la existencia de otro posible resultado que podría ser socialmente preferido normalmente no es tenido en cuenta. Rara vez uno puede conocer, por lo tanto, que el camino no tomado podría haber sido una mejor elección".*

Así pues, aprender acerca del contexto organizativo de las votaciones es importante, no sólo porque nos hace participantes más críticos e inteligentes sino, además, porque también nos desafía a analizar en profundidad los distintos métodos de votación existentes para, de este modo, descubrir sus características teóricas pero, también, el significado de los resultados por ellos obtenidos. Es en esta tarea donde las herramientas y el análisis de la Teoría de la Elección Social y, en concreto, la Teoría de las Votaciones, se hacen indispensables.

Comencemos con un ejemplo, y analicemos algunas “confusiones” y problemas que puede aparecer a la hora de utilizar un determinado método de votación en dos casos reales relativamente recientes y llamativos que, además, ponen de manifiesto que el interés en los temas de votación en los últimos años ha traspasado la barrera de las discusiones científicas y ha llegado incluso a convertirse en un debate social: las elecciones de 2000 en EEUU, o las de 2002 en Francia.

En ambos casos, quedaba claro que los resultados se habían visto muy afectados por la existencia de unos candidatos que no tenían una oportunidad real de ganar y, sin embargo, fueron capaces de tener una gran influencia en los resultados, dado que en tales elecciones sólo se tuvieron en cuenta los candidatos que los votantes situaron en el primer lugar en sus preferencias.

En concreto, en las elecciones presidenciales de 2002 en Francia, en primera ronda, un votante podía votar por cualquiera de entre nueve candidatos, siendo los más relevantes el presidente Chirac del partido Gaulista, Jospin del partido Socialista y Le Pen del Frente Nacional.

La ley electoral francesa establece un procedimiento, basado en el método de Pluralidad con Descarte, según el cual, si ningún candidato obtiene la mayoría de los votos, los dos que consigan mayor número en primera ronda se enfrentarán en una segunda vuelta. En este caso, Chirac concluyó primero (con un 19,9% de votos), pero sorprendentemente Le Pen fue el segundo finalista (16,9% de votos). Y, en segunda ronda, ganó Chirac aplastantemente.

Pues bien, aún a pesar del tercer puesto de Jospin, las evidencias disponibles sugieren que en una lucha directa contra Le Pen, éste hubiera ganado fácilmente y, en ese caso, es bastante plausible que él hubiese podido haber vencido a Chirac en una segunda ronda (véase, Dasgupta y Maskin, 2004), poniéndose de manifiesto que el sistema electoral francés tiene un serio problema (compartido con todos los métodos que sólo requieren de los votantes indicar su candidato favorito): no puede incorporar esa información importante sobre las preferencias completas de los votantes en relación a los candidatos. De este modo, permite a candidatos minoritarios (candidatos que, en principio, no tienen una oportunidad real de ganar por si mismos), como el extremista Le Pen, tener un efecto apreciable en el resultado de la elección.

De igual modo podemos recordar las competidas elecciones del 2000 en Estados Unidos. Las papeletas del Estado de Florida fueron determinantes en la elección del Presidente, siendo finalmente George Bush quien, al ganar por un estrecho margen en Florida, se convirtió en Presidente de Estados Unidos.

Muchos politólogos han especulado con el hecho de que si Nader no hubiese sido candidato, Gore hubiese ganado en Florida y, en consecuencia, hubiese sido el presidente elegido (véase Hodge y Klima, 2005). En otras palabras, de nuevo, un “spoiler candidate”, en el sentido de un candidato que no tenía una oportunidad real de ganar la elección, pudo afectar su resultado de todas formas.

Pero además, el mismo análisis de los resultados podía suscitar fácilmente otras preguntas, como ¿qué habría ocurrido en el caso de que el sistema de votación utilizado hubiera sido otro? o, ¿podría otro sistema de votación haber generado un resultado más acorde a las preferencias de los votantes?

Para responder a estas preguntas consideremos de nuevo al ejemplo americano suponiendo que, como han considerado distintos expertos, las preferencias de los votantes pueden expresarse mediante órdenes completos y estrictos. De un modo simplificado tenemos[1] :

Ejemplo 1.1

Consideremos como relevantes los siguientes cuatro candidatos: Bush, Gore, Nader y Buchanan y que básicamente sólo hay cuatro categorías de votantes, cuya distribución y preferencias completas son:

---

[1] Este ejemplo tiene carácter ilustrativo y, por lo tanto, se abstrae de las complicaciones que tiene en la realidad es sistema de votación americano.

VOTANTES DE GORE (49%): {Gore, Bush, Nader, Buchanan}.
VOTANTES DE NADER (2%): {Nader, Gore, Bush, Buchanan}.
VOTANTES DE BUSH (48%): {Bush, Buchanan, Gore, Nader}.
VOTANTES DE BUCHANAN (1%): {Buchanan, Bush, Gore, Nader}.

Si suponemos, como ocurre en la mayoría de los sistemas electorales, que los votantes votan únicamente por su candidato favorito, una forma de determinar el ganador notablemente aceptada es elegir al candidato que alcance una mayoría absoluta de los votos. Ahora bien, dado que dicho candidato no existe en este caso, pues ninguno alcanza el 51% de los votos, ¿cómo determinar el vencedor?

Supongamos ahora que permitimos que los electores expresen el orden completo de sus preferencias. Aunque Gore sólo sea el favorito del 49% del electorado, las ordenaciones dejan ver que el 51% antepone a Gore frente a Bush o Buchanan y un 97% lo prefiere a Nader. De este modo, Gore resultará elegido con un sistema electoral que respete "la regla de auténtica mayoría" (por ejemplo, como veremos, todos los llamados métodos Condorcet), en la que cada votante expresa su voluntad ordenando según sus preferencias a todos los candidatos y el vencedor, si existe, es el candidato que supera a cada uno de sus rivales al ser comparado con ellos cara a cara (se le llama Candidato Condorcet), en este caso, Gore.

Ahora bien, también se utilizan ordenaciones completas de los candidatos en otros métodos de votación. Fijémonos, por ejemplo, en la "votación por puntos", sistema utilizado por otra importante familia de métodos de votación, los llamados métodos Posicionales.

Dado que existen cuatro candidatos, asignemos cuatro puntos al candidato favorito de un votante, tres al segundo, dos al tercero y uno al menos deseado. Vence el candidato que suma el mayor número de puntos. Este es el llamado método de Borda, que aparece aplicado en la Tabla 1.1, en el cual, y sin pérdida de generalidad, lo aplicamos no sobre los votos, sino sobre los porcentajes de voto.

PUESTO DEL CANDIDATO	PUNTOS POR VOTO	TOTAL DE PUNTOS
Votantes de Gore (49%)		
Gore	4	4 x 49 = 196
Bush	3	3 x 49 = 147
Nader	2	2 x 49 = 98
Buchanan	1	1 x 49 = 49
Votantes de Nader (2%)		
Nader	4	4 x 2 = 8
Gore	3	3 x 2 = 6
Bush	2	2 x 2 = 4
Buchanan	1	1 x 2 = 2
Votantes de Bush (48%)		
Bush	4	4 x 48 = 192
Buchanan	3	3 x 48 = 144
Gore	2	2 x 48 = 96
Nader	1	1 x 48 = 48
Votantes de Buchanan (1%)		
Buchanan	4	4 x 1 = 4
Bush	3	3 x 1 = 3
Gore	2	2 x 1 = 2
Nader	1	1 x 1 = 1
		Total de Gore: 300 **Total de Bush: 346**

Tabla 1.1Aplicación al Ejemplo 1.1 del Método de Borda

Según el método de Borda, Bush consigue 346 puntos y Gore sólo 300. De este modo, y a pesar de que la mayoría simple del electorado prefiere a Gore, el hecho de que sólo un 2%

sitúa a Bush por debajo del segundo puesto, es un resultado suficiente para concederle la victoria por este método.

Como hemos visto, los métodos Condorcet y los métodos Posicionales conducen a resultados diferentes. Entonces, ¿cuál de ellos representa mejor las preferencias de los votantes?, ¿bajo cualquier circunstancia es alguno de ellos mejor que el resto?

Una primera respuesta podría buscarse evaluando los distintos métodos de votación desde un punto de vista axiomático, atendiendo a ciertos principios fundamentales que todo sistema electoral debería cumplir. Estaríamos entonces en el mismo camino del trabajo pionero iniciado por Kenneth J. Arrow (1951, 1963), que establece una estructura axiomática de la Elección Social, y que da lugar a su conocido Teorema de Imposibilidad, en el que se muestra que es imposible encontrar un procedimiento de elección social que simultáneamente cumpla un conjunto de condiciones débiles y razonables.

Ahora bien, esta visión normativa no es la única posible y así, más recientemente, y a partir del creciente interés despertado por la Teoría de Juegos y su irrupción en las Ciencias Sociales, el acento se pone en el estudio de las propiedades estratégicas de los métodos de agregación de preferencias, en particular de los métodos de votación.

En este sentido, una de las principales preocupaciones que surgen se refiere a la posibilidad de encontrar reglas de votación no manipulables (a prueba de estrategias), es decir, reglas de votación que, para cualquier situación posible, establecen como estrategia dominante para cada votante revelar sus verdaderas preferencias.

De nuevo, encontramos una respuesta negativa en los resultados de Gibbard (1973) y Satterthwaite (1975) que, al igual que Arrow, establecieron un nuevo Teorema de Imposibilidad que pone de manifiesto que no es factible encontrar métodos de votación no dictatoriales para los que no existan circunstancias en las que es rentable para al menos un votante llevar a cabo un voto estratégico.

Partiendo de estos dos resultados negativos tan significativos, en la siguiente sección se definen dos de los posibles enfoques alternativos que permiten establecer una cierta demarcación entre las diferentes formas de abordar el problema de la agregación de preferencias y, como tal, el análisis de los métodos de votación.

1.3. Agregación de las preferencias: enfoques directo e indirecto

De un modo no exhaustivo y coincidiendo con Austen-Smith y Banks (1998), se podría dividir los modelos que tratan el análisis de la Teoría de la Elección Social y la Teoría de las Votaciones y, por lo tanto, los procesos de agregación de preferencias, bajo dos enfoques alternativos: un enfoque directo y un enfoque indirecto, aunque la frontera entre ellos sea en ocasiones difusa, dado que ambos parten de elementos comunes para su análisis.

1.3.1. Contexto General.

La base de un modelo de elección social incluye una especificación de un conjunto de individuos relevantes, un conjunto de alternativas factibles o resultados y, para cada individuo, una descripción de sus preferencias sobre dichas alternativas.

En este sentido, y sin entrar en mayores formalidades, supongamos que las preferencias individuales pueden ser representadas mediante *un perfil de preferencias* donde a cada individuo se le asigna una ordenación estricta y completa de todas las alternativas factibles.

En este contexto, un *método de elección social* asigna a cada perfil de preferencias una alternativa o subconjunto de alternativas que representa la alternativa o conjunto de alternativas socialmente deseables.

Partiendo de este esquema general, ¿cómo abordar el proceso de la agregación de preferencias individuales en un resultado colectivo?

En un primer enfoque, que podríamos considerar más normativo, se trataría de examinar las posibilidades de que las preferencias individuales sean agregadas *directamente* en una relación colectiva o social mediante un método de votación Esta agregación directa de las preferencias no es sin embargo, en general, equivalente a su agregación *indirecta* a través de las acciones individuales puesto que, en principio, no existe una razón de peso para suponer que las elecciones sociales conducirán al mismo resultado si la agregación se lleva a cabo directamente sobre las verdaderas preferencias o, por el contrario, se obtiene indirectamente a partir de los votos finalmente emitidos.

Dicho de otro modo, a pesar de que en cualquier elección se espera que las acciones individuales de los votantes representadas en sus papeletas estén íntimamente conectadas con sus preferencias reales sobre el conjunto de alternativas o candidatos, esto no implica que no pueda también ocurrir, por ejemplo, que un individuo decida abstenerse en la elección o votar estratégicamente (revelando unas preferencias distintas de las suyas) si tal decisión le reporta algún beneficio.

Así pues, bajo un segundo enfoque, que pondríamos considerar más positivo, los individuos no son ya sujetos pasivos del proceso de decisión colectiva, sino que hacen elecciones individuales de comportamiento, que luego determinarán conjuntamente el resultado de la elección social. De este modo, estos modelos caen directamente en la metodología de la Teoría de Juegos y, en particular, en la relativa a la Teoría de la Implementación.

Ahora, las partes fundamentales del modelo ya no son únicamente las preferencias individuales de los votantes, sino que hay que incluir también el conjunto de posibles comportamientos o estrategias disponibles para cada uno de los participantes, además de una descripción de cómo cualquier perfil de estrategias se relaciona con el conjunto de resultados. Al igual que en el caso anterior, la elección del método adecuado bajo este segundo enfoque puede estar influenciada por las circunstancias particulares de la situación objeto de estudio.

Veamos con mayor detalle cada uno de estos dos enfoques.

1.3.2. Enfoque Directo de Agregación de Preferencias.

Bajo el enfoque de agregación directa de preferencias, lo que se busca básicamente es entender y analizar las propiedades de los distintos métodos de votación en orden a su utilización como reglas de agregación de los perfiles de preferencias individuales en alguna relación de preferencias colectiva.

En este sentido, Arrow, en su trabajo titulado *Social Choice and Individual Values* (1951, 1963), se interesaba por las dificultades que afectan a la decisiones tomadas por grupos y las inconsistencias a las que tales decisiones pueden llevar, ofreciendo una visión pesimista en la materia mediante el desarrollo de su conocido Teorema General de Posibilidad.

En dicho teorema, Arrow establece que no es posible encontrar un procedimiento de elección social que simultáneamente cumpla un conjunto de condiciones débiles y razonables (que se describirán en detalle a continuación), es decir, demuestra la imposibilidad de encontrar procedimientos de agregación directa de preferencias y, por tanto también, métodos de votación, que no se vean sometidos a inconsistencias, salvo que se verifiquen supuestos muy restrictivos en el modo de llevar a cabo tal agregación o en las circunstancias en las que ésta se produzca.

Utilicemos de nuevo el Ejemplo 1.1 de las elecciones americanas del 2000. En él observábamos cómo la regla de la mayoría simple y todos los métodos Condorcet daban como ganador a Gore, mientras que el método posicional de Borda daba como ganador a Bush.

Entonces, puesto que los resultados para estos métodos son dispares en este ejemplo, tratemos, usando la senda seguida por Arrow y evaluando dichos métodos (o cualquier otro) atendiendo a ciertos principios fundamentales que todo sistema electoral debería cumplir, de contestar a las preguntas ya planteadas en la introducción de este capítulo: ¿cuál de estos métodos representa mejor las preferencias reales de los votantes?, ¿es alguno superior a los demás?

Partamos para ello del supuesto de que la mayoría de los análisis admitirían que todo buen sistema de elección debería cumplir al menos los siguientes axiomas:

a) *Dominio no restringido (Universal)*: o lo que es lo mismo, todos los posibles perfiles de preferencias deberían ser admisibles.

b) *Principio de Pareto*: también llamado principio de consenso, que establece que si de un modo unánime todos los individuos de la sociedad prefieren estrictamente la alternativa *a* a la alternativa *b*, lo mismo deberá ocurrir en el resultado conjunto.

   Desafortunadamente, ambos axiomas son verificados por los dos métodos utilizados en el Ejemplo 1.1.

c) *Anonimato*: "un hombre un voto" o principio de indiferencia: quién eres no determina tu influencia en la elección. También este principio lo cumplen los métodos en cuestión.

d) *Neutralidad*: igual tratamiento de los candidatos, lo que significa que las reglas electorales no deben favorecer a un candidato más que a otro. De nuevo, ambos métodos lo cumplen.

¿De acuerdo con qué principio difieren los resultados?

Veamos lo que sucede si el candidato Buchanan deja la carrera por la presidencia. Ateniéndonos al Ejemplo 1.1, según la regla de la mayoría simple Bush y Gore empatan con un 49% de votos cada uno, mientras que, para cualquier método Condorcet, Gore todavía gana, puesto que sigue venciendo por mayoría a los restantes candidatos, Bush y Nader (continúa siendo Candidato Condorcet). Como además Buchanan es el que tiene el resultado de Borda más pequeño, su eliminación tampoco debería suponer ningún cambio para ese método.

Pero veamos qué ocurre en los distintos perfiles de los votantes si eliminamos a Buchanan y mantenemos todo lo demás sin cambios:

VOTANTES DE GORE (49%): {Gore, Bush, Nader}.
VOTANTES DE NADER (2%): {Nader, Gore, Bush}.
VOTANTES DE BUSH (48%): {Bush, Gore, Nader}.
VOTANTES DE BUCHANAN (1%): {Bush, Gore, Nader}.

Ahora, con sólo tres candidatos, si de nuevo aplicamos el método de Borda, Gore obtiene un resultado de Borda de 248 frente a los 247 de Bush. Por lo tanto, este sistema de votación falla en impedir que candidatos “irrelevantes”-sin opciones de triunfo, como es el caso de Buchanan- puedan determinar el resultado de la elección con su presencia o ausencia. Esto es lo que Arrow denominaba la “independencia de las alternativas irrelevantes” (IAI).

Así pues, desde esta perspectiva y, por lo que respecta al Ejemplo 1.1, los métodos Condorcet parecen ser superiores a los Posicionales porque, a pesar de que todos ellos satisfacen los principios de Pareto, Anonimato, y Neutralidad, sólo los primeros respetan la propiedad de IAI.

Sin embargo, existe un problema potencial. Los métodos basados en la mayoría pueden infringir otro principio bien aceptado, la Transitividad.

La Transitividad exige que, si el candidato *a* es preferido a *b* y *b* es preferido a *c*, entonces *a* debe ser preferido a *c*. Ahora bien, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2

Pensemos en una situación con tres candidatos y el siguiente perfil de preferencias:

VOTANTES (35%): {Gore, Bush, Nader}.
VOTANTES (33%): {Bush, Nader, Gore}.
VOTANTES (32%): {Nader, Gore, Bush}.

El 67% de los votantes sitúa a Gore sobre Bush, el 68% a Bush sobre Nader, y el 65% a Nader sobre Gore. Dicho de otro modo, quienquiera que sea el candidato elegido, al menos el 65% de los electores prefiere a otro. En este caso, los métodos basados en la relación de mayoría por pares, como los Condorcet, no produce vencedor. Esta posibilidad es la conocida como Paradoja de Condorcet, señalada ya a finales del siglo XVIII por Marie-Jean-Antoine-Nicholas de Caritat, Marqués de Condorcet, y las ordenaciones anteriores constituyen el llamado Ciclo de Condorcet. Técnicamente, la existencia de tales ciclos significa que la regla de la mayoría es intransitiva.

La Transitividad es un principio por el cual los métodos Posicionales tienen una ventaja sobre aquéllos basado en la regla de la mayoría, porque esos métodos siempre generan un orden social transitivo.

En resumen, en lo que respecta a la comparación entre los métodos Condorcet, y los métodos Posicionales (la regla de Borda en el ejemplo) encontramos que los primeros satisfacen todos menos uno de los principios analizados (transitividad), y lo mismo ocurre para los sistemas posicionales (independencia de las alternativas irrelevantes) Esto podría llevarnos a la pregunta de si existe algún otro sistema de votación que satisfaga simultáneamente todos los principios.

La respuesta, como ya hemos comentado, está contenida en el Teorema de Imposibilidad Arrow:

Teorema 1.1 (Arrow, 1963)

Dado un conjunto finito de votantes N y un conjunto de candidatos A, mayor que tres, no existe ninguna Función de Bienestar Social F que satisfaga simultáneamente las condiciones Unanimidad, principio de Pareto, independencia de alternativas irrelevantes y Dominio Universal de las preferencias.

En otras palabras, este teorema establece que no existe ninguna función de bienestar social y en realidad ningún método de votación, que satisfaga una serie de condiciones razonables. A pesar de que por separado cada una de las condiciones impuestas resulta razonable, pues establecen condiciones necesarias en la búsqueda de un sistema democrático en la elección social, conjuntamente dan lugar a un resultado incompatible.

Además, según Arrow, incluso si prescindimos del Anonimato y de la Neutralidad, cualquier método de votación que satisfaga el principio de Pareto, IAI y Transitividad, debe ser dictatorial, esto es, el resultado obtenido debe depender de la ordenación de las preferencias de un único votante (el dictador). Dado que la dictadura viola claramente el anonimato, el Teorema de Arrow implica que ningún método verifica todos los principios simultáneamente.

Entonces, desde el punto de vista de la modelización, estos resultados nos dicen que cualquier regla de agregación de las preferencias mínimamente democrática posee una desventaja muy seria como base para una teoría general en la Elección Social, puesto que dicha regla no puede, en principio, explicar la toma de decisiones sociales en determinados contextos y, al mismo tiempo, asumir cierto grado de amplitud en la especificación de las preferencias individuales.

¿Cómo elegir entonces cuál es el mejor método de votación siguiendo esta primera aproximación de la agregación directa de preferencias?

Una gran parte de los esfuerzos de la investigación en Elección Social posterior a la publicación del Teorema de Imposibilidad de Arrow, se encamina a la búsqueda de vías de escape del mismo, por medio del debilitamiento de las condiciones en él consideradas. Las direcciones en las que se han intentado las resoluciones incluyen, entre otras, restricciones de dominio, preferencias no transitivas, elecciones sociales no binarias, un debilitamiento de la condición de IAI, o la eliminación del requisito de Unanimidad.

En este sentido, por ejemplo, una primera posible vía de escape según las contribuciones de Black (1948, 1958), consiste en eliminar la condición de Dominio Universal de las preferencias, y estudiar situaciones en las que los perfiles admisibles deben satisfacer ciertas condiciones. En este mismo sentido, Moulin (1994) mantiene que la manera más simple de superar el teorema de imposibilidad consiste en restringir el dominio de preferencias y, de entre las múltiples restricciones posibles, tal vez la consideración de preferencias de un sólo pico, haya sido la más exitosa[2].

---

[2] Para una contribución reciente sobre la literatura de restricción de dominios ver Suzumura y Xu (2004).

Si mantenemos el Dominio Universal pero relajamos la propiedad de IAI, redefiniéndola en lugar de modificar el dominio donde se aplica, estaríamos en la dirección seguida entre otros por Saari (1998), Campbell y Kelly (2000b), Quesada (2003) y Powers (2005).

Por otro lado, Quesada (2005) propone que un modo simple de que los votantes superen el teorema de Arrow podría ser extender el dominio permitiendo que los votantes se abstengan, de modo que la AIA se vacía parcialmente.

Otra posible vía de escape propuesta, pero que desafortunadamente se ha visto que no permite salir del resultado de imposibilidad, se refiere a la relajación de los requisitos de racionalidad tanto en el contexto de funciones (Sen, 1970), como en el de correspondencias de elección social (véase Sen, 1977 y Suzumura, 1983).

También cabe destacar otros trabajos que se centran, fuera ya del propio contexto particular del teorema de imposibilidad de Arrow, pero en el mismo sentido del enfoque directo de la agregación de las preferencias, en la comparación de los distintos métodos de votación desde un punto teórico o de sus resultados; en la búsqueda de métodos de votación que cumplan un conjunto de propiedades aceptables; e incluso en su estudio desde un punto de vista más empírico o de comportamiento.

En este sentido y, por supuesto, sin pretender una recopilación exhaustiva, entre las investigaciones llevadas a cabo en estas direcciones podemos citar, las caracterizaciones del método de Borda (Young, 1974) y de los métodos Posicionales (Smith, 1973 y Young, 1975) en términos de la propiedad de Consistencia Externa (es decir, en la coherencia en los resultados obtenidos al agregar o combinar grupos de votantes independientes pero con candidatos comunes).

Por su parte, Laslier (1996) para métodos basados en la posición de las alternativas (entre ellos, todos los métodos Posicionales) y Laffond et al. (1995) para métodos de votación Condorcet de tipo C1 (basados exclusivamente en la relación vencer por mayoría en la comparación por pares) analizan su comportamiento en términos de la propiedad de

Consistencia de Composición. Un método satisface esta propiedad si, suponiendo que es posible dividir el conjunto de alternativas en “proyectos”, cada uno de los cuales incluye un conjunto de “variantes” y, además, cada individuo tiene preferencias estrictas sobre los proyectos (un proyecto *A* es preferido a *B* si y sólo si el individuo en cuestión prefiere todas las variantes de *A* a las de *B*), el método elige las mejores variantes de los mejores proyectos. Sus resultados son, entre otros, que si bien todos los métodos Posicionales la incumplen, entre los métodos Condorcet analizados la respuesta no es tan rotunda, puesto que algunos sí la cumplen.

Precisamente para esos métodos Condorcet de tipo C1 como, por ejemplo, el Ciclo Superior (Schwartz, 1972), el Conjunto No Cubierto (Fishburn, 1977), el Mínimo Conjunto Cubierto (Dutta, 1988) o el Conjunto Bipartista (Laffond et al., 1993), los mismos Laffond et al. (1995) compara sus resultados, analizando si existe alguna relación de inclusión o intersección entre ellos.

De Donder et al (2000), elaboran un estudio similar, pero ampliando el análisis al considerar los principales métodos Condorcet mientras que, por su parte y más recientemente, Klamler (2003, 2004a, b) realiza una comparación en los mismos términos pero de forma binaria, entre el método de Dogson y el método Copeland, y el de Kemeny junto con Slater y el de Borda, respectivamente.

En una comparación más teórica entre distintos métodos no podría faltar, por supuesto, aunque de manera renovada, la discusión clásica entre Borda y Condorcet (Risse, 2005 y Saary, 2006).

Por su parte, entre los autores preocupados por caracterizar métodos de votación o buscar nuevas reglas de elección con propiedades atractivas están, por ejemplo, García-Lapresta y Llamazares (2000, 2001) que, permitiendo “preferencias difusas”(los individuos expresan sus preferencia sobre las alternativas individuales mediante distintos niveles de intensidad entre 0 y 1) presentan, entre otras cosas, una clase nueva de métodos de votación a medio camino entre las mayorías simple y unánime que son caracterizados en términos de las propiedades de Unanimidad, Neutralidad, Anonimato y Monotonía, una propiedad definida formalmente en el siguiente capítulo y que, intuitivamente, propone que la respuesta de un método de votación ante modificaciones en las preferencias de los votantes a favor de un candidato no debería nunca ir en su contra. También, García-Lapresta y Martínez-Panero (2000) que, en el mismo contexto anterior, presentan una variante "difusa" del método de Borda y lo comparan con el método del Voto Aprobatorio; Llamazares y García-Lapresta (2008) que extienden algunos métodos clásicos a este nuevo campo de las preferencias difusas; Yeh (2008) que caracteriza de nuevo la regla de Pluralidad; o, entre otros muchos, Massó y Vorsatz (2008) que proponen y caracterizan una extensión natural del Voto Aprobatorio.

Por último, cabe señalar que algunos autores incluyen ya en sus análisis la consideración de cuestiones más empíricas (entre otros, Chamberlin et al., 1984; Regenwetter y Tsetlin, 2004 y 2006), apuntando que en el estudio o la comparación de los distintos métodos en la actualidad es también necesario incluir algún tipo de evaluación empírica sobre su comportamiento.

1.3.3. Enfoque Indirecto de Agregación de Preferencias.

Una posible alternativa a la aproximación directa de la agregación de preferencias para entender las cuestiones que se abordan en el marco de la Elección Social, surge en la década de los años 70, a partir de la perspectiva que sugiere la Teoría de Juegos, y es el estudio de las propiedades estratégicas de los métodos de elección social y, en particular, de los métodos de votación.

En la sección anterior, vimos como Arrow se preocupaba por demostrar la imposibilidad de obtener un método de votación adecuado incluso cuando todos los individuos implicados actuasen de acuerdo a sus verdaderas preferencias o, lo que es lo mismo, aunque ninguno de ellos actuase de forma estratégica. De este modo, la aproximación a la elección social bajo el enfoque de la agregación directa de preferencias no tiene en cuenta los posibles "aspectos estratégicos" del problema, es decir, no se preocupa de la diferenciación entre las preferencias reales de los individuos y sus acciones (las preferencias plasmadas en sus papeletas de voto). Sin embargo, esta diferenciación es clave si abordamos el problema de agregación de preferencias bajo un enfoque indirecto, es decir, si permitimos la posibilidad de que los agentes no actúen ya exclusivamente de acuerdo a sus verdaderas preferencias, sino que permitimos que incorporen comportamientos estratégicos a la hora de llevar a cabo sus decisiones.

La incorporación de comportamientos estratégicos en el análisis de los métodos de votación ya fue señalada por Vickrey (1960) y Dummet y Farquharson (1961) argumentaban que: "*parece poco probable que exista un procedimiento de votación en el que nunca sea beneficioso para algún votante votar "estratégicamente", es decir, no sinceramente*".

Las investigaciones posteriores sobre la manipulabilidad de los esquemas de votación- iniciado por Maurakami (1968), Gibbard (1973), Pattanaik (1973) y Satterwaite (1975)- han confirmado esencialmente estos supuestos tan pesimistas.

1.3.3.1. Manipulación.

Bajo el enfoque indirecto de agregación de preferencias, ante cualquier problema de elección social, los individuos racionales implicados pueden optar por declarar sus preferencias verdaderas o, por el contrario, declarar otras falsas si esto les conviene. De este modo, en general, el votante tenderá a escoger sus acciones con el fin de obtener el resultado más favorable entre los que pueda alcanzar, dado el método de votación en cuestión y las acciones de los demás votantes.

La consideración simultánea de las acciones de diversos agentes con intereses en conflicto, en un marco que defina las estrategias posibles para cada uno y los resultados de cada combinación de estrategias, es el objeto de la Teoría de Juegos. De ahí que la Teoría de la Elección Social y la Teoría de Juegos se hayan proporcionado mutuamente importantes estímulos. La primera, encontrando en la otra el instrumento adecuado para analizar el comportamiento del votante como agente activo sometido a distintos procedimientos de votación. Y la segunda, encontrando en la Elección Social una problemática abierta en la que poner a prueba sus distintos tipos de análisis (cooperativo o no).

Sin entrar en cuestiones específicas de la Teoría de Juegos que quedan lejos de la investigación concreta de esta Tesis, en lo que respecta a la Teoría de la Votaciones y el análisis de los métodos de votación, este creciente interés en el estudio por las consideraciones estratégicas, ha estado marcado desde sus comienzos, por un resultado negativo, el teorema de Gibbard-Satterthwaite.

Teorema 1.2 (Gibbard, 1973; Satterthwaite, 1975)

Ninguna función de elección social no dictatorial con más de dos opciones y Dominio Universal puede motivar a todos los votantes en cualquier circunstancia a manifestar sus verdaderas preferencias.

Dicho de otro modo, este teorema establece que todo método de votación no dictatorial con al menos tres resultados diferentes es manipulable.

Este resultado de imposibilidad está marcado por dos supuestos extremos en la caracterización de la manipulabilidad: el Dominio Universal de las preferencias y el hecho de que el esquema de votación sólo puede tener un único resultado (función de votación).

En este último sentido, una parte importante de la literatura posterior ha tratado de superar el teorema de Gibbard-Satterthwaite posibilitando el método de votación pueda tener más de un resultados. Es decir, se trataría de abandonar el esquema restrictivo de las reglas resolutiva (funciones de votación con un único resultado) y situarse en el esquema más general de las correspondencias de votación, es decir, permitir la posibilidad de resultados múltiples. Tal posibilidad nos lleva a la necesidad de afrontar un problema previo, la extensión de órdenes de preferencia de los votantes.

Dado un método de votación cualquiera, determinar si es manipulable consiste en constatar si algún votante, votando estratégicamente, puede asegurarse un resultado de la elección más preferido al que obtendría si emitiera su voto con sus verdaderas preferencias. Por lo tanto, el problema principal en cualquier definición de manipulación es cómo determinar cuándo un resultado es preferido a otro para un votante.

La definición de una regla de votación resolutiva no manipulable (a prueba de estrategias) no es ambigua puesto que, de acuerdo con sus preferencias individuales, cualquier individuo puede comparar entre posibles candidatos ganadores y elegir a uno de ellos sobre la base de unas preferencias estrictas y completas. Sin embargo, esa misma definición de manipulabilidad aplicada a reglas de votación no resolutivas requiere de unas preferencias definidas de un modo más exhaustivo, de tal modo que permita realizar comparaciones entre conjuntos de ganadores y elegir a uno de ellos. Es en este punto en el que surge una cuestión importante a tratar, ¿qué órdenes de preferencias sobre subconjuntos son compatibles con unas preferencias estrictas y completas aplicadas a los elementos de un conjunto? Cada posible respuesta a esta cuestión permite llevar a cabo una definición de lo que se entiende por manipulabilidad cuando tratamos con reglas no resolutivas.

Entre las respuestas aportadas por la literatura en este sentido, destacan los trabajos pioneros de Pattanaik (1973), Barberà (1977), Kelly (1977), Gärdenfors (1976), Feldman (1979a, b) y, más recientemente, entre otros, Duggan y Schwartz (2000, 2001), Campbell y Kelly (2000, 2002), Ching y Zhou (2002), Benoit (2002), Barberà et al. (2001) o Özyurt y Sanver (2008). El resultado básico es negativo: el teorema de Gibbard–Satterthwaite es muy robusto y para muchas restricciones de dominio razonables la no manipulabilidad es equivalente a distintas versiones de la dictadura.

En relación a esta misma línea de investigación, apuntar brevemente, que es precisamente su análisis en mayor detalle y, en concreto, la profundización en la problemática de la extensión de las preferencias y su uso como herramienta en la literatura sobre manipulación en el contexto de métodos de votación no resolutivos, lo que constituye el estudio principal contenido el siguiente capítulo.

Pero volviendo a los intentos de superación del resultado negativo de Gibbard–Satterthwaite y, sin pretender una presentación exhaustiva, otra rama de la literatura centra sus esfuerzos, al igual que en el caso del Teorema de Arrow en restringir la condición de Dominio Universal de las preferencias, estableciendo restricciones de dominio, en la mayoría de los casos considerando preferencias de un solo pico. Bajo esta condición, y en el caso de los métodos de votación resolutivos con un número impar de votantes, existe siempre un candidato Condorcet que es, por tanto, una elección no manipulable (Black, 1948 y Moulin, 1980). Sin embargo, si volvemos al contexto de los métodos de votación no resolutivos, donde no está asegurada la existencia de un candidato Condorcet, dependiendo de los dominios de preferencias establecidos, pueden existir o no métodos no manipulables (Kim y Roush, 1984).

Por su parte, otros autores, y dado que de partida está claro que la mayoría de los métodos de votación parecen ser manipulables, se plantean la cuestión natural de investigar cuales se comportan mejor en términos de manipulación, es decir, cuales son menos manipulables. La respuesta, evidentemente, dependerá de la medida de manipulabilidad que se considere.

Una posibilidad es considerar el número de perfiles de preferencias para los cuales un método de votación es manipulable: cuanto mayor sea ese número más manipulable será el método. Esta medida es la considerada entre otros por Kelly (1993) que, para una muestra significativa de todos los métodos de votación resolutivos, unánimes y no dictatoriales, y para el caso de dos votantes y tres candidatos, obtiene que la gran mayoría de métodos son muy manipulables y que incluso introduciendo condiciones adicionales, como anonimidad, la cosa no mejora (aunque sí un poco más para el caso de las propiedades de Pareto o Monotonía). En el mismo sentido, Maus et al. (2007) obtienen un resultado general para un número arbitrario de votantes y candidatos: las reglas casi dictatoriales son las menos vulnerables a la manipulación de entre todas las reglas no dictatoriales y unánimes.

Smith (1999) define y computa cuatro medidas de manipulación para un número pequeño de votantes y candidatos y, con ellas, analiza la manipulabilidad de Borda, Pluralidad, MaxMin y el Conjunto No Cubierto. Sus principales conclusiones son, que MaxMin y el Conjunto No Cubierto son los métodos más inmunes a la manipulación cuando cada votante tiene un conocimiento absoluto o bien, en el otro extremo, ningún conocimiento, de las preferencias del resto de votantes, mientras que el método de Borda es especialmente manipulable cuando cada votante tiene conocimiento absoluto de las preferencias de los demás.

En este mismo sentido, Aleskerov y Kurbanov (1999) amplían el análisis anterior nada menos que a 26 métodos de votación bien conocidos divididos en tres categorías básicas (entre las que se incluyen los métodos Posicionales y Condorcet), y discuten también nuevas medidas de manipulación que no se basan simplemente en evaluar la proporción de perfiles para los que un método de votación es manipulable, sino que tienen en cuenta además el número de estrategias o el tamaño mínimo de la coalición que son compatibles con una manipulación exitosa. Sus resultados más significativos son que, para un número de alternativas entre 3 y 5, y de votantes entre 2 y 10, los métodos menos manipulables entre los distintos grupos por ellos analizados son los Posicionales y, además, dentro de estos mismos, el menos manipulable es al Voto Aprobatorio. En cualquier caso, y analizado ya cada método por separado, es el Conjunto No Cubierto el que mejor se comporta en media en relación a todos los índices propuestos.

De igual modo, Favardin, Lepelley y Serais (2002), confrontando de nuevo los métodos Posicionales y Condorcet, caracterizan las situaciones en las que dos de sus más representativos métodos, Borda y Copeland, son manipulables por un único votante o por una coalición de votantes, cuando sólo hay tres candidatos. A partir de aquí, derivan un tipo de representaciones analíticas que miden la vulnerabilidad de esos métodos ante la posibilidad de que los votantes se comporten estratégicamente. Sus conclusiones son que Borda es significativamente más vulnerable a la manipulación que Copeland.

Por su parte, Favardin y Lepelley (2006) establecen una tipología de los distintos contextos en los que puede existir manipulación de un método de votación, en función básicamente de la posibilidad de que los votantes puedan comunicarse entre ellos y elaborar estrategias conjuntas y, de que cada individuo, al tratar de manipular, pueda esperar una reacción por parte de los demás. A partir de esa tipología, definen seis medidas distintas de manipulación y, para el caso de tres candidatos, derivan de nuevo una representación analítica para determinar la vulnerabilidad a la manipulación de una amplia gama de métodos de votación (incluidos de nuevo los Posicionales y Condorcet). Sus principales resultados son que la jerarquía de los distintos métodos varía en función del contexto de votación considerado, pero que algunos métodos son claramente dominados, mientras que otros, entre los cuales se encuentra Borda, son los menos vulnerables en algunos contextos específicos.

Por último, y aunque por supuesto todas las referencias incluidas tanto en este esquema como en el anterior están lejos de ser una lista exhaustiva y completa de las cuestiones abordadas en el análisis de los métodos de votación, hay que señalar que algunos autores como Peress (2003), para las reglas de Pluralidad, Mayoría, Voto Aprobatorio y Voto Simple Transferible;

Gehrlein y Lepelley (2003) para la regla del votante mediano; Heckelman (2003) para el llamado método de Borda probabilístico; Klamler (2004b) para los método de Dogson y Borda; o Salles (2007), para la regla de Borda, entre otros, aúnan los dos enfoques, y comparan todos estos métodos desde el punto de vista tanto normativo como estratégico, concluyendo que, dado que ningún método de votación es perfecto, su elección debería tener en cuenta el contexto específico de su aplicación.

1.4. Comentarios finales y cuestiones adicionales.

El problema de la agregación de preferencias individuales y, en particular, la búsqueda de un método de votación satisfactorio, se ha visto marcado por resultados adversos desde sus inicios.

Tanto si abordamos el problema desde un punto de vista normativo, a través de la agregación directa de preferencias, como si lo hacemos desde un punto de vista más positivo (teniendo en cuenta consideraciones de carácter estratégico), mediante la agregación indirecta de las mismas, el teorema de imposibilidad de Arrow, en el primer caso, y el de Gibbard-Satterthwaite, en el segundo, han supuesto un duro golpe para la investigación posterior al concluir que no es posible obtener un método de votación ideal y perfecto aplicable a cualquier situación.

A partir de estos resultados iniciales, las investigaciones posteriores han seguido caminos diferentes. En algunos casos, y tratando de superar estos resultados adversos, los teóricos en la materia han tratado de abordar el problema no ya tanto desde un punto de vista general, sino más bien desde un punto de vista parcial y particular, centrándose en determinadas propiedades o en determinados métodos o familias de métodos de votación concretos, y buscando para ellos la respuesta a la misma pregunta. Es decir, la posibilidad de elección de un método de votación que al menos presente un conjunto de propiedades destacables que lo hagan válido en determinados contextos particulares.

Además, y teniendo en cuenta que en no pocas ocasiones la información sobre las preferencias reales de los votantes es de carácter privado y que, por tanto, dichos votantes puede intentar modificarlas en un intento de obtener un resultado final más favorable, muchos autores también han considerado la inclusión en su análisis de los métodos de votación de cuestiones estratégicas o de manipulación.

Pues bien, es en este mismo sentido en el que el análisis en profundidad de la propiedad de Participación contenido en el esta Tesis resulta relevante. Como veremos, esta propiedad pone de manifiesto la necesidad de que los métodos de votación incentiven el voto, en el sentido de que establezcan como requisito fundamental el requerimiento de que la decisión de votar o participar suponga para los votantes la obtención de un resultado no peor al que obtendrían si decidiesen abstenerse, consiguiendo de ese modo que el ir a votar refrende sus verdaderos deseos.

De este modo, el análisis del cumplimiento de esta propiedad por parte de los distintos métodos de votación no sólo es importante bajo un enfoque axiomático, en el sentido de que su cumplimiento es deseable si pretendemos que el método seleccionado satisfaga un mínimo de criterios democráticos, además, su incumplimiento introduce la posibilidad de analizar algunos elementos estratégicos en el comportamiento de los individuos al dar lugar a la aparición de lo se ha dado en conocer como la Paradoja de la Abstención (*No Show Paradox*).

Y es que, como veremos con detalle a lo largo de esta Tesis, la aparición de esta paradoja puede verse también como un tipo especial de manipulación, ya que supone un incentivo para que los votantes no expresen sus preferencias de un modo sincero y decidan abstenerse, al existir la posibilidad de que su voto les genere un resultado peor que el que obtendrían si decidiesen no votar.

Por otro lado, y volviendo a la literatura suscitada a partir de los Teoremas de Imposibilidad de Arrow y Gibbard-Satterthwaite, la mayor parte de los autores han dedicado su esfuerzo investigador a superar de algún modo esos resultados iniciales, llegando en muchos casos a todo lo contrario, su extensión a otros contextos

En concreto, y por lo que se refiere al Teorema de Gibbard-Satterhwaite, y teniendo en cuenta que su resultado se enmarca en el contexto de los métodos de votación resolutivos (funciones de votación), al intentar responder a la pregunta ¿qué ocurre si tomamos en consideración un contexto más amplio como el de los métodos no resolutivos?, se ha encontrado como respuesta la extensión a ese contexto más general de las correspondencias de votación, de dicho resultado tan negativo.

Pues bien, en este mismo sentido está dirigida la investigación aquí desarrollada, sólo que, en este caso, tanto el teorema de imposibilidad tratado como el modo de manipulación utilizado, son diferentes.

En primer lugar, el Teorema de Imposibilidad analizado es el Teorema de Moulin (1988a) que, de manera intuitiva, establece que, siempre que para la obtención de un único candidato ganador utilicemos como método de votación un método Condorcet existirán situaciones en las que se incumple la propiedad de Participación, es decir, en las que votar conlleva un resultado peor que aquel al que se llega mediante la abstención.

Por lo tanto, en segundo lugar, la manipulación ya no se produce como consecuencia de una modificación de las preferencias reales de los votantes, como en el caso general, sino que ahora es mediante la utilización de la posibilidad de abstención.

De este modo, a partir del resultado inicial de Moulin, la pregunta que se ha tratado de responder en los capítulos siguientes es: ¿es posible que dicho teorema no se cumpla en el contexto de los métodos no resolutivos?, o dicho de otro modo, ¿se mantiene este resultado negativo cuando, de manera análoga al Teorema de Gibbard-Satterthwaite, abandonamos el esquema restrictivo de los métodos de votación resolutivos, y nos situamos en el esquema general de las correspondencias de votación y, en particular, de las correspondencias de votación Condorcet?

CAPÍTULO 2. MÉTODOS DE VOTACIÓN, PROPIEDADES Y HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS

2.1. Introducción.

La moderna Teoría de la Elección Social, tal como se ha señalado en el Capitulo 1, ha estado muy marcada desde sus inicios por dos importantes resultados de imposibilidad.

Por un lado, el Teorema de Arrow sobre la posibilidad de agregar las preferencias individuales en forma de preferencias sociales. Este primer resultado de imposibilidad concluye que, aunque deseable, dicho objetivo es inalcanzable en términos generales o, dicho de otra forma, que al exigir unas pocas condiciones, aparentemente razonables, en cualquier proceso de elección social, no resulta posible encontrar un procedimiento capaz de satisfacerlas.

A la problemática de agregación de preferencias suscitada por Arrow, se añadió posteriormente la relativa a incentivos y manipulación, donde se encuadra el segundo resultado de imposibilidad establecido por Gibbard y Satterthwaite que demuestra que no es posible evitar que los votantes puedan manipular de algún modo las decisiones sociales.

Teniendo en cuenta estos resultados negativos, puesto que en democracia se supone que los objetivos de la acción colectiva deben descansar en la opinión de los individuos y depender de esas opiniones únicamente, y dado que en muchas ocasiones las decisiones sociales se toman haciendo uso de procedimientos de votación, la moderna Teoría de las Votaciones intenta clasificar los actuales métodos de votación teniendo en cuenta no sólo cuestiones éticas o normativas, sino también cuestiones estratégicas o positivas. De esta forma, no es ya suficiente que un método de votación presente una caracterización axiomática favorable si, por otro lado es manipulable o vulnerable al falseamiento o a la modificación de las preferencias individuales pues, en ese caso, los resultados obtenidos no reflejarán realmente los verdaderos deseos de los votantes.

Es en este sentido que el cumplimiento de algunas propiedades por parte de cualquier método de votación como, en concreto, las de Monotonía y Participación, ambas basadas en la racionalidad individual y en la revelación sincera de las preferencias, es relevante.

Este capítulo pretende, en primer lugar, sentar las bases necesarias sobre las cuales se van a desarrollar los capítulos posteriores, y en segundo lugar, presentar y ofrecer ya algunos resultados respecto a una de las cuestiones más importantes de esta Tesis, el problema de la extensión de preferencias.

Con respecto al primer objetivo, las Secciones 2.2 y 2.3 contienen, además de la introducción a la terminología básica, la definición formal de alguno de los métodos y familias de métodos de votación más conocidos y relevantes para la investigación. A continuación, la Sección 2.4 se centra en las propiedades de Monotonía y Participación. Estas propiedades tienen que ver con las respuestas de los métodos de votación ante cambios en las preferencias de los votantes. Más en concreto, su cumplimiento pone de manifiesto la necesidad de que los resultados de la elección social respondan de modo favorable a las preferencias de los votantes, bien ante un cambio en esas preferencias (propiedades de Monotonía), bien ante un cambio en su decisión de votar o abstenerse (propiedades de Participación). Son pues, propiedades importantes tanto desde el punto vista axiomático o normativo, como también en el plano estratégico, pues su incumplimiento supone la aparición de resultados no deseables, como se pone de manifiesto en los resultados existentes ya en la literatura de las votaciones.

En concreto, en el caso de Participación, como ya se apuntaba al final del capítulo anterior, el Teorema de Moulin (1988a) establece que todos los métodos Condorcet resolutivos están sometidos a la Paradoja de la Abstención, un resultado poco deseable en un método de votación que en esta misma sección ya se define más formalmente además de aclararse mediante un ejemplo ilustrativo, Ejemplo 2.3.

Respecto al segundo objetivo, se plantea y analiza el principal problema que surge al intentar estudiar y evaluar los métodos de votación no resolutivos, en concreto, el problema de extender las preferencias de los votantes. Este problema hace referencia a la búsqueda de órdenes de preferencias sobre subconjuntos de alternativas o candidatos consistentes con el orden de preferencias que los votantes tienen sobre dichas alternativas o candidatos individuales. En este sentido, en la Sección 2.5 se describen algunos de los principales principios de extensión y se obtienen resultados que sobre sus implicaciones se han obtenido. Y en la Sección 2.6 se exponen algunos de los principales resultados que, en referencia a Manipulación y, en concreto, al problema de la extensión del Teorema de Gibbard-Satterthwaite a correspondencias de votación se han obtenido, y que nos permitirá realizar ciertos paralelismos entre los resultados de manipulación de los métodos de votación y los resultados negativos de abstención que se analizan en el Capítulo 3.

Por último, se finaliza el capítulo con la Sección 2.7 que recoge las conclusiones y algunos comentarios adicionales.

2.2. Terminología y Conceptos Básicos.

2.2.1. Notación.

Denotaremos con $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ el conjunto de candidatos, donde n representa el número de candidatos y con $V = \{1, 2,..., m\}$ el conjunto de votantes, donde m representa el número de votantes, siendo $n, m \geq 2$.

Supondremos que las preferencias de cualquier votante están especificadas mediante un orden completo, P, sobre el conjunto de candidatos, X. En general, y salvo que se indique lo contrario, se supondrá que este orden es lineal (estricto y completo). Así, $P = x_1 > x_2 > x_3 > x_4$... denota un orden de preferencias lineal en el que x_1 es el candidato estrictamente más preferido, x_2 el segundo, y así sucesivamente, y denotaremos x_iPx_j (alternativamente, $x_i >_P x_j$) si el candidato x_i es preferido estrictamente al candidato x_j en el orden de preferencias P.

Dado el conjunto de votantes V, llamamos ***Perfil de Preferencias*** de V sobre X a toda m-pla, $p = (P_1,..., P_m) \in \boldsymbol{P}$, cuyos m componentes, uno por cada votante, constituyen una lista ordenada de elementos de X (el orden de preferencias de dicho votante), y donde $\boldsymbol{P}$ denota el conjunto de todos los perfiles posibles de preferencias de V sobre X. A todo par (X, p), se le denomina ***Situación***, y decimos que una situación es ***unánime*** si todos los votantes en el perfil p tienen exactamente las mismas preferencias sobre los candidatos en X.

Denominamos ***Correspondencia de votación*** a cualquier función f que asocia cualquier situación (X, p) con un subconjunto no vacío de X, $f(X, p) \subseteq X$. Los elementos de $f(X, p)$ son los candidatos elegidos (los ganadores) en X a partir del perfil de preferencias p. Si se requiere que la función f tenga un único elemento para cualquier situación (X, p), f se dice que es una ***Función de votación***. Dado que sólo consideraremos correspondencias de votación ***anónimas*** (donde todos los votantes son igualmente considerados), un perfil de preferencias sobre X a partir de V puede también describirse mediante la especificación de cuántos de los n votantes de V sostienen cualquiera de los posibles órdenes de preferencias sobre X.

Dado un perfil de preferencias $p \in \boldsymbol{P}$, un votante $v \in V$, y una correspondencia de votación f, denominamos $\boldsymbol{Sup_v f(X, p)}$ al candidato favorito para ese votante v de entre los candidatos ganadores, $f(X, p)$, dado su orden de preferencias p_v. De igual modo, denominamos $\boldsymbol{Inf_v f(X, p)}$, al candidato menos preferido (antifavorito) para él de entre los candidatos ganadores, $f(X, p)$.

Dado X, y cualquier par de conjuntos disjuntos de votantes $V_1 = \{1, 2,..., m_1\}$ y $V_2 = \{m_1+1, m_1+2,..., m_1+ m_2\}$, y para cualquier par de perfiles de preferencias p_1 y p_2 sobre X a partir de, respectivamente, V_1 y V_2, denotamos por p_1+p_2 al nuevo perfil de preferencias sobre X originado a partir de $V_1 \cup V_2$. Denominamos mediante $p+v$ $(p - v)$ al perfil obtenido al añadir (eliminar) un votante v (o un conjunto de votantes v con un perfil de preferencias unánime) al perfil p.

Siendo (X, p) cualquier situación con n candidatos y m votantes, y dado cualquier par de candidatos x_i, x_j de X, $\boldsymbol{p(x_i, x_j)}$ computa el número de votantes en el perfil de preferencias p

que prefieren estrictamente x_i a x_j. Resulta obvio que, cuando el perfil de preferencias está compuesto por órdenes lineales, $p(x_i, x_j) + p\ (x_j, x_j) = m$.

2.2.2. Herramientas para el Análisis de los Métodos de Votación.

Una vez establecida la terminología básica a utilizar, introduciremos algunas herramientas útiles para presentar de un modo más reducido y manejable la información contenida en cualquier perfil de preferencias dado de los votantes.

Matriz de Comparaciones

Dada una situación $(X,\ p)$ llamaremos ***Matriz de Comparaciones*** de dicha situación a la matriz cuadrada $n\times\ n$, $\mathbf{M_p}$, donde cada candidato está representado por una fila y su correspondiente columna, y cuyas entradas, $\boldsymbol{a_{ij}}$, $\forall i\neq j$, representan los valores $p(x_i,\ x_j)$, no dándose ningún valor para las entradas a_{ii}, $\forall i\in X$.

Ejemplo 2.1

Dado el perfil p: 5 votantes: $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$

4 votantes: $x_2 > x_3 > x_4 > x_1$

La Matriz de Comparaciones, M_p, asociada al perfil p es:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		5	5	5
x_2	4		9	9
x_3	4	0		9
x_4	4	0	0	

Figura 2.1 Matriz de Comparaciones

De este modo, por ejemplo, $a_{12} = p(x_1, x_2) = 5$ significa que, de los 9 votantes, 5 prefieren estrictamente al candidato x_1 en su comparación con el candidato x_2.

En ocasiones a la Matriz de Comparaciones le añadiremos una nueva columna, (s), constituida por la suma de los elementos de la fila correspondiente, con el fin de facilitar la realización de cómputos posteriores en la obtención del conjunto de candidatos ganadores en algunos de los métodos de votación que se definirán a lo largo de este capítulo.

	x_1	x_2	x_3	x_4	(s)
x_1		5	5	5	15
x_2	4		9	9	22
x_3	4	0		9	13
x_4	4	0	0		4

Figura 2.2 Matriz de Comparaciones Ampliada

Matriz de Victorias

Dada una situación (X, p) llamaremos ***Matriz de Victorias***, $\boldsymbol{V_p}$, a una matriz cuadrada de orden n formada por ceros y unos (y sin entradas en la diagonal principal), cuyas filas y columnas, al igual que en el caso de la Matriz de Comparaciones, representan a los candidatos de dicha situación y cuyos elementos $\boldsymbol{v_{ij}}$, $\forall i \neq j$, toman un valor igual a 1 cuando, en la comparación de los candidatos x_i y x_j, el candidato fila x_i es preferido por una mayoría estricta de votos al candidato columna x_j, es decir, $p(x_i, x_j) > p\,(x_j, x_j)$, asignando un valor 0, en caso contrario. Así, por ejemplo, la Matriz de Victorias, V_p, correspondiente para el Ejemplo 2.1 es:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		1	1	1
x_2	0		1	1
x_3	0	0		1
x_4	0	0	0	

Figura 2.3 Matriz de Victorias

De este modo, $v_{12} = 1$ representa en el perfil p que el candidato x_1 vence por mayoría estricta de votantes al candidato x_2.

Obviamente, la Matriz de Victorias es fácilmente deducible a partir de la Matriz de Comparaciones.

Matriz de Posiciones

Dada cualquier situación (X, p) con n candidatos y m votantes, denotaremos por $\boldsymbol{r_{ij} = r(x_i, j)}$ $\forall x_i \in X$ y $j = 1, 2,..., n$, al número de votantes en p para los que el candidato x_i está situado en la j-ésima posición en sus órdenes de preferencias.

De este modo, denominamos ***Matriz de Posiciones*** para la situación (X, p) a la matriz cuadrada de orden n, $\boldsymbol{R_p}$, cuyas entradas son los elementos $r_{ij} = r(x_i, j)$, en los que la fila i representa el elemento i-ésimo del conjunto X (candidato x_i) y la columna j la posición j-ésima en el orden de preferencias.

Volviendo a nuestro Ejemplo 2.1, la Matriz de Posiciones, R_p correspondiente a dicho perfil es:

	1º	*2º*	*3º*	*4º*
x_1	5	0	0	4
x_2	4	5	0	0
x_3	0	4	5	0
x_4	0	0	4	5

Figura 2.4 Matriz de Posiciones

De este modo, por ejemplo, $r_{11} = r(x_1, 1) = 5$ significa que, de los 9 votantes, 5 sitúan al candidato x_1 en primera posición.

Tanto la Matriz de Victorias como la Matriz de Comparaciones muestran la información referente a la comparación por pares entre los distintos candidatos y, por lo tanto, son unas herramientas muy útiles para presentar la información contenida en el perfil de preferencias, para aquellos métodos en los que dicha comparación por pares es la base de su definición. En el caso de la primera, lo relevante es la relación de mayoría estricta entre los distintos candidatos, quién vence a quién, mientras que la segunda, además, cuantifica dicha mayoría.

Por su parte, la Matriz de Posiciones nos indica los distintos lugares en los que se encuentra cada candidato en el perfil de preferencias y cuantas veces ocupa la misma posición, una información esencial en los llamados métodos Posicionales que, como se definirá con más detalle a continuación, determinan el conjunto de candidatos ganadores de la situación en función de la posición de cada candidato en las preferencias de los votantes.

Nótese que en esta Matriz de Posiciones la suma tanto de los elementos de la fila como de la columna es igual al total de votantes cuando los perfiles están constituidos por órdenes lineales, es decir, $\sum_{x_i \in X} r(x_i, j) = m, \ \forall j = 1,...m$ y $\sum_{j=1}^{n} r(x_i, j) = m, \ \forall x_i \in X$.

2.3. Elección Social y Métodos de Votación.

El sistema utilizado en la toma de decisiones colectivas consiste, en no pocas ocasiones, en un método de votación y, por eso, antes de entrar en su investigación más profunda, se hace necesario definirlos formalmente, al menos, algunos de los más relevantes.

2.3.1. Métodos de Votación.

Analíticamente, un método de votación resuelve el problema de decisión colectiva donde distintos agentes (votantes) deben elegir, en general simultáneamente, entre distintos resultados (candidatos), sobre los cuales sus preferencias están en conflicto, seleccionando a los ganadores en base a dichas preferencias, ordinalmente reportadas, y sólo a ellas.

La elección de un método de votación concreto ha sido una cuestión de amplio estudio a lo largo de la Historia reciente. De hecho, el debate sobre la justicia de distintos métodos de votación ha estado vigente desde las contribuciones de Borda (1781) y Condorcet (1785), y es en los métodos desarrollados a partir de sus investigaciones en los que, en mayor o menor medida, se centra la investigación contenida en esta Tesis.

Cuando sólo existen dos candidatos, como ya sabemos, la bien conocida regla de la mayoría parece ser, sin duda, el método más justo. La formulación axiomática del principio de la mayoría se debe a May (1952), y su teorema nos dice que este método de la mayoría es el único método de votación que es anónimo (igual tratamiento de todos los votantes), neutral (igual tratamiento de todos los candidatos), y monotónico (un mayor apoyo a un candidato no amenaza su elección).

Ahora bien, cuando existen más de dos candidatos, ¿qué método de votación extiende mejor la regla de la mayoría? Parece que una respuesta adecuada sería el método de Pluralidad: cada votante elige un único candidato en su papeleta, y el candidato con más votos gana. Este era (y continúa siéndolo) uno de los métodos de votación más populares, y sus dos críticos más importantes, los antes mencionados, Borda y Condorcet, son los pioneros en el estudio de la investigación sobre métodos de votación. Ambos autores se dieron cuenta de que el método de Pluralidad podía elegir un mal candidato, uno que perdería en la comparación por pares frente a cualquier otro candidato y, para resolver esta dificultad, propusieron el uso de nuevas reglas de votación para sustituirlo.

Condorcet sugirió elegir el candidato que venciera a cualquier otro en las comparaciones por pares (si tal candidato, desde entonces llamado *Candidato Condorcet*, existe). Borda asignó puntos a cada candidato, crecientes linealmente en relación a su posición en las preferencias del votante; y propuso elegir al candidato que obtuviese una suma de puntos más alta para todos los votantes.

Estas dos ideas han dado lugar a las dos familias más importantes de los métodos de votación basados en preferencias ordinales, los métodos Condorcet (aquellas reglas que eligen al ganador de Condorcet cuando éste existe, sin otra restricción para el caso de que no sea así) y los métodos Posicionales (basados en la asignación de puntos en función de la posición de cada candidato en el orden de preferencias del votante).

2.3.1.1. Métodos de votación Posicionales.

Los denominados ***Métodos Posicionales*** (*Scoring Methods*) son una familia de métodos que utilizan como elemento determinante de su definición la información contenida en los órdenes de preferencias de los votantes sobre la posición que en ellos ocupan los distintos candidatos, no teniendo en cuenta, a la hora de determinar su resultado, ningún tipo de comparación entre candidatos. Este acento en la posición de los candidatos refleja, en gran medida, la idea de cuantificar la intensidad de las preferencias de los votantes, a través de las diferentes valoraciones que se dan a los candidatos en función del lugar que ocupan en el orden expresado por los votantes. Para la definición y análisis de estos métodos, ver Young (1974, 1975) y Smith (1973).

Definición 2.1. (Método de votación Posicional)

Denominamos ***Método de Votación Posicional*** al método de votación que, dada una secuencia no decreciente de números reales $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{n-1}$ con $s_0 < s_{n-1}$, asigna una puntuación a cada candidato en función de la posición que éste ocupa en el orden de preferencias del votante: s_0 puntos al candidato situado en última posición, s_1 al candidato situado en penúltima posición, y así sucesivamente. Los candidatos con la máxima puntuación agregada para el conjunto de votantes, $R(x) = \sum_{j=1}^{n} s_{n-j} r(x, j)$, son los candidatos elegidos.

Entre el conjunto de métodos posicionales, los más conocidos son:

a) **Método de Pluralidad ($f_{PLURALIDAD}$)**

En el método de Pluralidad la secuencia de ponderaciones asignadas a los candidatos en el orden de preferencias de cada votante son:

$$s_0 = s_1 = \ldots = s_{n-2} = 0,\ s_{n-1} = 1$$

Por lo tanto, el método de Pluralidad determina como ganador/es a aquel o aquellos candidatos x para los que la suma $\sum_{j=1}^{n} s_{n-j} r(x,j)$ es máxima. Pero, puesto que en este caso $\sum_{j=1}^{n} s_{n-j} r(x,j) = s_{n-1} r(x,1) = r(x,1)$, son ganadores los candidatos que aparecen como favoritos para el mayor número de votantes o, lo que es lo mismo, aquellos que consiguen el máximo de primeros puestos dado el perfil de preferencias. En el Ejemplo 2.1 dicho candidato, atendiendo al perfil de preferencias p, es x_1, con 5 primeros puestos.

Este método de votación pone todo su peso en el candidato situado en primer lugar en las preferencias del votante, reflejando así que, a la hora de determinar los ganadores, a los votantes sólo les preocupa su candidato favorito.

Formalmente, y haciendo uso de los elementos de la Matriz de Posiciones $r_{ij} = r(x_i, j)$, que como ya hemos indicado representan el número de votantes que tienen al candidato x_i en la j-ésima posición de su lista de preferencias, podemos entonces definir el método de Pluralidad como:

$$f_{PLURALIDAD}(X, p) = \{x \in X : r(x,1) \geq r(y,1), \forall y \in X\}$$

En el Ejemplo 2.1 es fácil observar que el ganador de Pluralidad es el candidato x_1 haciendo uso de la Matriz de Posiciones (Figura 2.4) pues sólo tenemos que fijarnos en la primera columna y observar que candidato tiene un valor mayor en dicha columna ($r_{11} = r(x_1, 1) = 5$).

b) **Método de Antipluralidad, ($f_{ANTIPLURALIDAD}$)**

Si invertimos en cierto modo la secuencia de ponderaciones, en relación al método de Pluralidad, haciendo:

$$s_0 = 0,\ s_1 = \ldots = s_{n-2} = s_{n-1} = 1$$

y nos fijamos en el candidato que obtiene una menor puntuación, es decir, determinamos como ganador/es a aquel o aquellos candidatos que consiguen el mínimo de últimos puestos dado el perfil de preferencias obtenemos el método de Antipluralidad.

Efectivamente, teniendo en cuenta que en este caso $\sum_{j=1}^{n} s_{n-j} r(x, j) = \sum_{j=1}^{n-1} s_{n-j} r(x, j) + s_0 r(x, n) = \sum_{j=1}^{n-1} r(x, j) = m - r(x, n)$, la suma de puntuaciones máxima la alcanza quien resulta antifavorito para menos votantes. En el Ejemplo 2.1, si atendemos al perfil de preferencias p, los candidatos x_2 y x_3 son los ganadores de este método, puesto que no están situados en el último lugar de las preferencias de ningún votante.

Formalmente, y haciendo uso de los términos $r_{ij} = r(x_i, j)$, podemos definir el Método de Antipluralidad como:

$$f_{ANTIPLURALIDAD}(X, p) = \{x \in X : r(x, n) \leq r(y, n), \forall y \in X\}$$

De nuevo, si miramos la Matriz de Posiciones del Ejemplo 2.1 (Figura 2.4), vemos que los ganadores en este caso son los candidatos x_2 y x_3, pues son los que tienen asignado el menor valor en la última columna ($r(x_2, 4) = r(x_3, 4) = 0$).

c) **Método de Borda (f_{BORDA})**

El método de Borda es el método de votación que determina como ganador/es a aquel o aquellos candidatos que obtenga un mayor resultado cuando la secuencia ponderada de valores es:

$$s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 2, \ldots, s_{n-2} = n\text{-}2, s_{n-1} = n\text{-}1$$

Borda, a diferencia de Pluralidad, no pone toda la intensidad de las preferencias en una única posición (candidatos favoritos), sino que pondera (de modo decreciente) todas las posiciones, distribuyendo así la intensidad de las preferencias entre todos los candidatos. Como resultado, en este método, el ganador será el candidato que está mejor posicionado, en media, en el perfil de preferencias.

De un modo más formal, definamos el ***Resultado de Borda***, R_{BORDA}, de un candidato como la suma de las ponderaciones que ese candidato obtiene en un perfil de preferencias p. Por tanto, para un candidato determinado, x, obtenemos que el valor

$$R_{BORDA}(x) = \sum_{j=1}^{n}(n-j)r(x,j)$$

Calculando dicho resultado para todos los candidatos de una situación, los ganadores del método de Borda son aquellos que consiguen el mayor Resultado de Borda, es decir:

$$f_{BORDA}(X, p) = \left\{ x \in X : \sum_{j=1}^{n}(n - j)r(x,j) \geq \sum_{j=1}^{n}(n - j)r(y,j), \forall y \in X \right\}$$

En el Ejemplo 2.1 ese candidato es el candidato x_2, pues es el que obtiene un mayor Resultado de Borda ($R_{BORDA}(x_2) = \sum_{j=1}^{4}(4 - j)r(x_2,j)$ = (4-1)4 + (4-2)5 = 22).

El Resultado de Borda de cada candidato es fácil de calcular haciendo uso de la información contenida en la Matriz de Posiciones y también de la Matriz de Comparaciones. En el caso de la Matriz de Posiciones $R_{BORDA}(x_i)$ es el resultado de multiplicar la fila correspondiente al candidato x_i por el traspuesto del vector de ponderaciones (n-1, n-2,…, 1, 0) que coincide con la suma de los valores de la fila del candidato x_i en la Matriz de Comparaciones (es decir, el valor correspondiente al candidato x_i en columna (s) de la Matriz de Comparaciones Ampliada).

Se demuestra en Young (1974) que esta correspondencia está caracterizada por las propiedades de Neutralidad (todos los candidatos son igualmente considerados), Consistencia (esta propiedad se definirá en el Capítulo 4), Fidelidad (si hay un solo votante, su candidato favorito será el único elegido) y Cancelación (si $p(x_i, x_j) = p(x_j, x_i)$ $\forall i,j \in X$, todos los candidatos son elegidos). Más recientemente, Garcia-Lapresta y Martínez-Panero (2002) han extendido la Cuenta de Borda al contexto de las relaciones difusas, y Martínez-Panero (2004) ha realizado un detallado análisis histórico y una variedad de extensiones a contextos preferenciales más generales.

2.3.1.2. Métodos de Votación Posicionales con Descarte.

A partir de los métodos Posicionales anteriormente definidos, se han construido otros basados en ellos, los denominados Métodos Posicionales con Descarte (*Scoring Run-off*), a través de su aplicación de un modo secuencial. Los ganadores de estos métodos se determinan mediante la aplicación de las reglas correspondientes a los distintos métodos posicionales, de tal modo que, secuencialmente, se van eliminando los candidatos peor posicionados por estos métodos o se van seleccionando a los mejor posicionados hasta conseguir el ganador final.

a) **Método de Pluralidad con Descarte ($f_{P\text{-}D}$)**

Tal y como su nombre indica, el método de Pluralidad con descarte se basa en la aplicación reiterada del método de pluralidad. Selecciona como ganador a aquel candidato que se encuentra en primera posición en las preferencias de una mayoría absoluta de votantes y, en caso de que tal candidato no exista, selecciona a los dos candidatos que se encuentran en primera posición para un mayor número de votantes y determina el ganador aplicando de nuevo Pluralidad sobre ese conjunto reducido de candidatos.

En el Ejemplo 2.1, se seleccionan inicialmente x_1y x_2, y el candidato ganador final coincide con el ganador por el método de Pluralidad, x_1.

b) **Método del Voto Alternativo ($f_{V\text{-}A}$)**

Este método, al igual que Pluralidad con descarte, toma como referencia el método de Pluralidad. Determina el ganador mediante el siguiente procedimiento iterativo: en una primera etapa se calcula el resultado de Pluralidad de cada candidato y se elimina aquel para el cual este resultado es menor. Se computan de nuevo las puntuaciones de pluralidad para los candidatos restantes, y se elimina, de nuevo, a los perdedores. La operación se repite hasta que ya no sea posible eliminar candidatos.

En el Ejemplo 2.1, los candidatos con menor número de primeros puestos son x_3 y x_4. Una vez eliminados del perfil de preferencias inicial, el candidato perdedor de Pluralidad es ahora x_2, dando lugar a que sea x_1 el candidato ganador.

c) **Método de Nanson (f_{NANSON})**

Este método aplica sucesivamente el método de Borda: En cada etapa, calcula el resultado de Borda de cada candidato, eliminando todos aquellos candidatos con un resultado de Borda inferior a la media. El proceso de eliminación continúa hasta que se alcance un número de candidatos ganadores determinado o hasta que no quedan candidatos que eliminar.

Señálese, que este método, a pesar de estar basado en Borda es, al mismo tiempo, un método Condorcet, pues cumple con el criterio de Condorcet que, como veremos a continuación, es el que define este tipo de métodos.

Por tanto, en el Ejemplo 2.1 el método de Nanson selecciona como ganador al candidato x_1, por ser el candidato Condorcet.

2.3.1.3. Métodos de votación Condorcet.

Como señalamos al comienzo de esta sección, otra familia importante de métodos de votación es la constituida por los llamados métodos de votación Condorcet. Estos métodos de votación utilizan como elemento determinante de su definición, a la hora de seleccionar el conjunto de ganadores, las comparaciones binarias entre candidatos, no teniéndose en cuenta en dicha comparación, a diferencia de lo que ocurría con los métodos Posicionales anteriormente descritos, la posición que dichos candidatos ocupan en el orden de preferencias de cada votante.

Más en concreto, los métodos Condorcet, y de ahí su nombre, eligen siempre al Candidato Condorcet cuando existe. Puede encontrarse una panorámica de métodos Condorcet y de algunas de sus propiedades en Fishburn (1977).

Definición 2.2 (Candidato Condorcet)

Decimos que un candidato x es un ***Candidato Condorcet*** si y sólo si, dada una situación (X, p), x vence por mayoría estricta a cualquier otro candidato en su comparación por pares, es decir, $p(x, y) > p(y, x)\ \forall y \in X/\{x\}$.

Está claro que no siempre va a existir un Candidato Condorcet para cualquier situación, pero si existe este es único.

Por otro lado, si un candida x vence o empata con cualquier otro candidato, es decir, si $p(x, y) \geq p(y, x)$ $\forall y \in X/\{x\}$, entonces se le denomina ***Candidato débil de Condorcet***.

Definición 2.3. (Método de Votación Condorcet y Condorcet Estricto)

Un ***método de votación*** f se denomina ***Condorcet*** si satisface el ***Criterio de Condorcet***, que requiere que, para toda situación (X, p), si existe un Candidato Condorcet, él sea el único elegido.

Un método de votación f se denomina ***Condorcet Estricto*** si para toda situación (X, p), en la que exista algún Candidato débil de Condorcet, el conjunto de ganadores está constituido por todos ellos.

En el Ejemplo 2.1, el candidato x_1 es el Candidato Condorcet, porque vence por mayoría estricta a todos los demás (todas las entradas de su fila en la Matriz de Comparaciones son superiores a $m/2$ o, lo que es igual, todas las entradas de su fila en la Matriz de victorias son 1) y, por lo tanto, es el ganador para todos los métodos Condorcet.

Definición 2.4. (Conjunto de Smith)

El ***Conjunto de Smith*** en una situación (X, p) es el subconjunto más pequeño S de X tal que cualquier candidato $y \in X - S$ es vencido por todo candidato $x \in S$.

Lógicamente, el problema de los métodos Condorcet lo encontramos cuando el Candidato Condorcet no existe, en cuyo caso cada uno de ellos, como veremos, seleccionará como ganador a cualquier candidato o subconjunto de candidatos en función del criterio específico adicional que lo defina.

En este sentido, en la definición de algunos de los principales métodos Condorcet, y tal y como se hace en Fishburn (1977), clasificaremos los distintos métodos en función de la información necesaria para definirlos y la acompañaremos, al igual que en el caso de los métodos Posicionales, con un nuevo ejemplo ilustrativo donde se presenta una situación inicial (X, p) sin un Candidato Condorcet y, por tanto, donde cada uno de los métodos descritos a continuación tendrá que determinar el resultado final en función de su definición correspondiente para este tipo de situaciones.

Ejemplo 2.2

Dado el perfil p: 1 votante: $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$

1 votante: $x_5 > x_4 > x_3 > x_2 > x_1$

1 votante: $x_3 > x_4 > x_1 > x_2 > x_5$

1 votante: $x_2 > x_1 > x_5 > x_3 > x_4$

1 votante: $x_4 > x_2 > x_5 > x_3 > x_1$

La Matriz de Comparaciones, M_p, asociada al perfil p es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		2	2	2	3
x_2	3		3	2	4
x_3	3	2		3	2
x_4	3	3	2		3
x_5	2	1	3	2	

Matriz de Victorias, V_p, correspondiente a p es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		0	0	0	1
x_2	1		1	0	1
x_3	1	0		1	0
x_4	1	1	0		1
x_5	0	0	1		0

Como podemos comprobar, en el perfil del Ejemplo 2.2 con 5 votantes, no existe un candidato Condorcet porque ningún candidato vence a todos los demás por mayoría estricta. Esto se fácilmente deducible tanto mirando a la Matriz de Comparaciones y observando que ninguna de sus filas tiene todos los elementos por encima de $m/2 = 5/2$ o, lo que es lo mismo, viendo que no todas las entradas de su fila en la Matriz de Victorias son 1.

Definamos pues algunos métodos Condorcet y veamos como determinan los candidatos ganadores en la situación planteada en este Ejemplo 2.2.

Siguiendo como indicamos la clasificación de Fishburn (1977), podemos distinguir tres tipos diferentes de métodos Condorcet:

- Métodos C1: Son aquéllos métodos de votación que para toda situación (X, p) determinan el conjunto de ganadores, $f(X, p)$, únicamente a partir de la relación binaria de mayoría estricta cuya información, como ya sabemos, aparece recogida en la correspondiente Matriz de Victorias.

Dos de los métodos de votación Condorcet C1 más importantes son los métodos de Copeland, y Ciclo Superior (Top-Cycle).

a) **Método de Copeland ($f_{COPELAND}$)**

Entre las posibles definiciones alternativas, podemos definir el método de Copeland como aquél que determina como ganador a aquel o aquellos candidatos $x \in X$ que vencen por mayoría estricta a un mayor número de candidatos opositores, es decir:

$$f_{COPELAND}(X, p) = max_{\, x \in X} \, \#\{x \in X \colon xW_p y \;\; \forall y \in X\}$$

De este modo, y en términos de la Matriz de Victorias, es candidato ganador del método de Copeland aquel o aquellos candidatos cuya fila contenga el mayor número de unos.

Por tanto, el conjunto de ganadores para el método Copeland en el Ejemplo 2.2 es $\{x_2, x_4\}$, pues los dos presentan el mayor número de victorias, 3.

b) **Método de Ciclo Superior (Top-Cycle) de Schwartz ($f_{TOPCYCLE}$)**

Antes de definir este método de votación, es preciso introducir el concepto de relación de victoria indirecta:

Un *candidato x vence indirectamente* a otro candidato y si existe una secuencia de candidatos $x_0, x_1,..., x_k$, tal que $x = x_0$, $y = x_k$ y se cumple que x_0 vence a x_1, x_1 vence a $x_{2,...}$, x_{k1} vence a x_k. De este modo, xWW_py significa que el candidato x vence indirectamente al candidato y.

De este modo, una vez establecido el concepto de victoria indirecta, podemos definir el método de Ciclo Superior (Top-Cycle) de Schwartz como el método que determina como ganador a aquel o aquellos candidatos para los que no existe ningún otro candidato que los venza indirectamente y al que no venzan indirectamente, es decir:

$$f_{TOPCYCLE}(X, p) = \{x \in X\text{: no existe } y \in X \text{ tal que } yWW_px \text{ y no se cumpla } xWW_py\}$$

Los ganadores por el método Top-Cycle en el Ejemplo 2.2 son todos los candidatos, $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Comparemos dos a dos los candidatos de acuerdo con el orden $x_1x_5x_3x_4x_2$. El candidato x_1 vence al candidato x_5 por mayoría (pues $p(x_1, x_5) = 3$), y del mismo modo x_5 vence a x_3, x_3 vence a x_4, y x_4 vence a x_2. Por tanto, el orden anterior constituye un ciclo completo de la relación vencer por mayoría. En consecuencia, cualquier candidato vence indirectamente a cualquier otro, lo que implica que ninguno puede ser excluido del conjunto de ganadores.

Otro método Condorcet C1 es el método Elige-Todos.

c) **Método Elige-Todos ($f_{E\text{-}T}$)**

El método de votación Elige-Todos determina como ganador al Candidato Condorcet si existe y, en cualquier otro caso, al conjunto de todos los candidatos.

$$f_{E\text{-}T}(X, p) = \begin{cases} \{c\}, \text{ si } c \text{ es candidato Condorcet,} \\ X, \text{ si no existe candidato Condorcet} \end{cases}.$$

Aunque este último método Elige-Todos no es tan conocido como los dos anteriores, su relevancia quedará reflejada por su implicación en algunos de los resultados contenidos en el Capítulo 3.

Evidentemente, los ganadores para el método Elige-Todos en el Ejemplo 2.2, puesto que no existe un Candidato Condorcet, son todos los candidatos, $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

- Métodos C2: Son aquéllos métodos de votación que para toda situación (X, p) determinan el conjunto de ganadores, $f(X, p)$, en base no sólo a la relación de mayoría y, por lo tanto, en base al número de victorias, sino también teniendo en cuenta la cuantía de dichas victorias, es decir, hacen uso de la información contenida en la correspondiente Matriz de Comparaciones.

Entre los métodos de votación Condorcet C2 más conocidos están los métodos MaxMin, MaxMin Lexicográfico, Black y Kemeny.

d) Método MaxMin (f_{MAXMIN})

El método de votación Maxmin determina como ganador a aquel o aquellos candidatos que, en la comparación con sus competidores más fuertes se comportan mejor, es decir, los que tienen una menor oposición. Dicho de otro modo, este método selecciona al candidato o candidatos que, en su comparación por pares con los restantes candidatos, presentan el mayor apoyo mínimo.

Formalmente, en términos de la Matriz de Comparaciones, el candidato ganador del método MaxMin es aquel o aquellos candidatos cuya fila posea el mínimo más alto.

$$f_{MAXMIN}(X, p) = \{x \in \arg max_{x \in X} \{min_{y \in X} p(x, y)\}\}.$$

El conjunto de candidatos ganadores por el método MaxMin en el Ejemplo 2.2 es $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, pues los cuatro tienen 2 como el mínimo de sus correspondientes filas mientras que x_5 tiene un 1.

e) **Método MaxMin Lexicográfico ($f_{MAXMINLEX}$).**

Dada una situación (X, p), con $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y una matriz de comparación M_p. Para todo x_j, sea q (x_j) = ($q_{j1}, q_{j2}, \ldots, q_{jn-1}$) el vector formado por las entradas fuera de la diagonal de la fila p (x_j, x_r) de x_j ordenados en forma no decreciente.

Entonces, el candidato x_i es una ganador de $f_{MAXMINLEX}$ (X, p) sí y sólo si para todo candidato x_k, q (x_i) $\geq_{LEX}$ q (x_k) (es decir, $q_{i1} > q_{k1}$ o ($q_{i1} = q_{k1}$ y $q_{i2} > q_{k2}$) o ($q_{i1} = q_{k1}$ y $q_{i2} = q_{k2}$ y $q_{i3} > q_{k3}$) o…).

Incluimos aquí este método, a pesar de ser poco conocido, porque jugará un papel importante en los Capítulos 4 y 5. Este método es un refinamiento natural, basado en un criterio lexicográfico, del método MaxMin, y de ahí el nombre que hemos elegido, Método MaxiMin Lexicográfico.

El único ganador por el método MaxMin Lexicográfico en el Ejemplo 2.2 es el candidato x_2. En efecto, al reordenar de manera no decreciente las entradas de cada fila, se obtiene la siguiente Matriz de Comparaciones de filas no decrecientes:

x_1	2	2	2	3
x_2	2	3	3	4
x_3	2	2	3	3
x_4	2	3	3	3
x_5	1	2	2	3

Al comparar las primeras componentes, queda excluido x_5 (su primera componente es 1), al comparar las segundas componentes, quedan excluidos x_1 y x_3 (su segunda componente es 2), al comparar las terceras componentes, no se excluye a ninguno (la tercera componente de los que quedan es 3), y al comparar las cuartas componentes, se excluye a x_4 (su cuarta componente es 3, y la de x_2 es 4).

f) **Método de Black(f_{BLACK})**

El método de Black selecciona como ganador al Candidato Condorcet siempre que existe y, en caso contrario, determina como ganador a aquel o aquellos candidatos que resulten seleccionados al aplicar el método de Borda, es decir:

$$f_{BLACK}(X, p) = \begin{cases} \{c\}, \text{ si } c \text{ es candidato Condorcet,} \\ \{x \in X: x \text{ ganador de Borda}\}, \text{ si no existe candidato Condorcet} \end{cases}.$$

El único ganador en el Ejemplo 2.2 por el método Black es el candidato x_2, pues es el que obtiene el resultado de Borda más alto: 12.

g) **Método de Kemeny (f_{KEMENY}).**

A pesar de que existen distintas formas alternativas de definirlo, quizás la más sencilla formalmente es la que considera el método de Kemeny como aquel que determina como ganador a aquel o aquellos candidatos que figuran en primer lugar en alguna lista ordenada óptima, es decir, que obtenga un mayor ***Resultado de Kemeny***.

Partiendo de una lista ordenada de los candidatos P: $x_1 > x_2 >... > x_n,$ el resultado de Kemeny se calcula sumando los términos que se encuentran por debajo de la diagonal principal de la Matriz de Comparaciones cuando los elementos de dicha matriz están ordenados de acuerdo a esa lista P, es decir, $R_K(P) = \sum_{i<j} p(x_i, x_j)$. De esta forma:

$f_{KEMENY}(X, p) = \{x \in X$: x está a la cabeza de un orden P con el máximo resultado de Kemeny$\}$.

Calculemos el conjunto de ganadores por el método de Kemeny en el Ejemplo 2.2. Como veremos, este cálculo es el más complejo, con diferencia, de los realizados hasta ahora, puesto que en este perfil con 5 candidatos tendremos que calcular el resultado de Kemeny de cada uno de los 5! =120 órdenes posibles para luego determinar cuál es el mayor.

Con el fin de ahorrar cálculos utilizaremos la siguiente bien conocida (y fácil de justificar) proposición:

Proposición 2.1

Si p(y_i, y_j) > p(y_j, y_i), ningún orden O: …y_jy_i… en el que y_j precede inmediatamente a y_i tiene resultado máximo de Kemeny

(Es decir, en un orden con resultado máximo cada candidato sólo puede ir seguido inmediatamente por algún candidato que no le venza por mayoría. En efecto, si intercambiamos y_i con y_j se obtiene un orden O':…y_iy_j… con un resultado mayor, pues resultado de O' = resultado de O + p(y_i, y_j) - p(y_j, y_i))

Construyamos, por tanto, todos los órdenes que pueden ser óptimos de acuerdo con la Proposición 2.1 anterior:

1) Si O_1 comienza por x_1, éste candidato ha de ir seguido de x_5 (único candidato que no vence a x_1), y éste por x_3, y este por x_4, (quedando x_2 para el final).

Quedando así el orden O_1: $x_1x_5x_3x_4x_5$, cuyo resultado de Kemeny es 9+6+5+3 =23.

2) Si O_2 comienza por x_2, éste ha de ir seguido o bien de x_1, o bien de x_3, o bien de x_5 (únicos candidatos que no vencen a x_2).

Si el segundo en el orden es x_1, el tercero tendría que ser x_5 y el cuarto x_3.
Si el segundo en el orden es x_3, el tercero tendría que ser o bien x_1 o bien x_4.
Si el tercero en el orden es x_1, el cuarto sería x_5 (imposible, pues le seguiría x_3).
Si el tercero en el orden es x_4, el cuarto sería o x_5 (imposible) o x_1.
Si el segundo en el orden es x_5, el tercero sería x_3 y el cuarto sería x_4.

Quedan así los órdenes:

$O_{2,1}$: $x_2x_1x_5x_3x_4$, cuyo resultado de Kemeny es 12+7+5+3 = 27.
$O_{2,2}$: $x_2x_3x_4x_1x_5$, cuyo resultado de Kemeny es 12+8+6+3 = 29.
$O_{2,3}$: $x_2x_5x_3x_4x_1$, cuyo resultado de Kemeny es 12+7+6+3 = 28.

3) Si O_3 comienza por x_3, razonando análogamente, queda únicamente el orden:
O_3: $x_3x_4x_2x_1x_5$, cuyo resultado de Kemeny es 10+9+7+3 = 29.

4) Si O_4 comienza por x_4, razonando análogamente, quedan los órdenes:
   $O_{4,\,1}$: $x_4x_2x_1x_5x_3$, cuyo resultado de Kemeny es 11+10+5+3 = 29.
   $O_{4,\,2}$: $x_4x_2x_3x_1x_5$, cuyo resultado de Kemeny es 11+10+5+3 = 29.
   $O_{4,\,3}$: $x_4x_2x_5x_3x_1$, cuyo resultado de Kemeny es 11+10+5+3 = 29.

5) Si O_5 comienza por x_5, razonando análogamente, queda únicamente el orden:
   O_5: $x_5x_3x_4x_2x_1$, cuyo resultado de Kemeny es 8+8+6+3 = 25.

En conclusión, los órdenes $x_2x_3x_4x_1x_5$, $x_3x_4x_2x_1x_5$, $x_4x_2x_1x_5x_3$, $x_4x_2x_3x_1x_5$ y $x_4x_2x_5x_3x_1$ son óptimos, ya que tienen un resultado de Kemeny igual a 29, que es máximo. Por tanto, $f_{KEMENY}(X, p) = \{x_2, x_3, x_4\}$.

En Young y Levenglick (1978) esta correspondencia queda caracterizada por las propiedades de Neutralidad, una versión de Consistencia (el conjunto de órdenes óptimos de la combinación de dos electorados es la intersección de los conjuntos de órdenes óptimos de cada uno de ellos, siempre que dicha intersección sea no vacía) y una versión de la propiedad de Condorcet (si $p(x_i, x_j) > p(x_j, x_i)$, en ningún orden óptimo x_j precede inmediatamente a x_i). Véase también Kemeny y Snell (1962).

- Métodos C3: Son aquéllos métodos de votación que no son ni C1 ni C2 y que, por tanto, hacen uso de una información que va más allá de la contenida en la matriz de victorias y de la matriz de comparaciones, como es el caso de los métodos Young y Dogson.

h) Método de Dogdson (f_{DOGSON})

El método de Dogson determina como ganador a aquel o aquellos candidatos que necesitan un mínimo número de intercambios elementales en el perfil de preferencias de los votantes para convertirse en candidato Condorcet, teniendo en cuenta que un intercambio elemental a favor de un candidato x significa una mejora en el perfil de preferencias consistente en intercambiar en las preferencias de un votante su posición por la del candidato y que se encuentra inmediatamente por encima.

Los ganadores por el método Dogson en el Ejemplo 2.2 son los candidatos x_2 y x_4, pues ambos candidatos necesitan un único intercambio elemental (por ejemplo, x_2 con x_4 en el último votante y, x_4 con x_3 en el primero) para convertirse en Candidatos Condorcet.

i) **Método de Young (f_{YOUNG})**

El método de Young determina como ganador a aquel o aquellos candidatos que necesitan excluir un menor número de votantes para convertirse en Candidato Condorcet.

De esta forma, el método de Young, al igual que el método de Dogson, tiene en cuenta las modificaciones a las que es necesario someter el perfil de preferencias para obtener un candidatos que venzan a todos los demás por mayoría pero, a diferencia del anterior, Young lleva a cabo tales modificaciones mediante la eliminación de determinados votantes, en lugar de realizar intercambios elementales en las preferencias.

El conjunto de los candidatos ganadores por el método Young en el Ejemplo 2.2 es $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, pues todos ellos necesitan la eliminación de un único votante (por ejemplo, el último en el caso de x_1, el primero en el caso de x_2, y el tercero para x_3 y x_4).

2.4. Propiedades de Monotonía y Participación.

Si pensamos en formas democráticas de gobierno o elección, tanto a nivel nacional como en esquemas más particulares o minoritarios (como pueden ser comités de empresas o, por ejemplo, los sistemas que rigen la determinación de ganadores en eventos deportivos o artísticos), parece claro que resultaría muy valorable que cualquier decisión relacionada con un grupo de individuos respondiera realmente a sus deseos. Dicho de otro modo, que cualquiera que fuera el sistema elegido, garantizara que las preferencias de las personas implicadas fueran agregadas en elecciones colectivas de modo que, al menos en algún sentido, los resultados obtenidos respondieran o respetaran sus verdaderas aspiraciones.

Más en concreto, si tales decisiones son el resultado de la aplicación de un determinado método de votación, lo anterior pone de relieve la importancia del estudio en dicho método de las respuestas ante variaciones en los resultados de la votación a partir de cualquier cambio en las preferencias de los votantes.

Ahora bien, este tipo de análisis, como es natural, no resulta nada fácil de abordar de un modo tan general así que, las nociones relacionadas con estas cuestiones se han dirigido más modestamente a evitar la aparición de determinados resultados “perversos” en las elecciones sociales ante cambios en las preferencias de los individuos. Es decir, se han centrado en el estudio más realista de las respuestas o las variaciones en los resultados de una votación, como resultado de distintos tipos específicos de cambios en las preferencias.

Por ejemplo, parece claro que un método como la dictadura, que elige un mismo candidato sin importar cuantos votantes puedan variar y de qué forma sus preferencias reportadas, no parece muy satisfactorio. Por otro lado, y si nos situamos en el lado opuesto, requerir que un método de votación debería respetar la condición conocida como Soberanía de los Ciudadanos, que establece que para cualquier alternativa debe existir al menos un perfil de preferencias para el cual dicha alternativa resulte elegida, parece evidente.

Pues bien, sin llegar a ninguno de esos supuestos extremos, un requerimiento más modesto y plausible sería el de exigir que el método de votación en cuestión respondiera de un modo concreto a cambios igualmente concretos en las preferencias. Es precisamente este el sentido detrás del cumplimiento de las propiedades de Monotonía y Participación.

2.4.1. Monotonía.

De los numerosos axiomas que, al menos desde un punto de vista normativo, uno podría esperar que un sistema de votación satisficiese, la propiedad de Monotonía es quizás la más evidente, pues trata de poner de manifiesto la idea intuitiva de que un apoyo adicional a favor de un candidato elegido en una determinada situación, caeteris paribus, no debería nunca dañarlo, en el sentido de que no debería suceder que, como consecuencia de dicho apoyo, el candidato en cuestión pudiese resultar no elegido. Por lo tanto, el concepto de Monotonía parece uno de los más claros requerimientos de respuesta ante cambios en las preferencias. De hecho, se podría considerar como una condición necesaria para cualquier procedimiento de votación razonable.

De un modo más concreto y en su versión más débil (Fishburn, 1982), la propiedad de Monotonía establece que, si x es la única alternativa elegida por una colectividad dado un perfil de preferencias p, y si un nuevo perfil de preferencias p' se obtiene a partir de p desplazando x hacia arriba en alguna de las ordenaciones de los votantes (mientras el resto permanece inalterado), entonces x debería seguir siendo, al menos, una de las alternativas elegidas en el nuevo perfil. Formalmente:

Definición 2.5. (Monotonía Débil)

Un método de votación f cumple la ***Propiedad de Monotonía Débil*** si para cualquier par de perfiles p y p' (donde el perfil p' ha sido obtenido de p mediante un único intercambio a favor de x), y para todo candidato $x \in X$, si $f(X, p) = \{x\}$, entonces $x \in f(X, p')$.

Así pues, y según lo anterior, un procedimiento incumplirá esta propiedad si al mejorar la posición del único candidato ganador en el perfil de preferencias, manteniendo al resto de candidatos inalterados en sus relaciones entre sí, éste sale perjudicado dejando de formar parte del conjunto de ganadores.

A esta definición inicial podemos añadirle algunas restricciones que nos permitan obtener nuevas propiedades de Monotonía.

Si partimos de que inicialmente existe más de un candidato ganador, obtenemos una nueva definición más fuerte de Monotonía que en la literatura también aparece con la denominación de Asociación Positiva Fuerte (Muller y Satterwaite, 1977; Fishburn, 1977; y Moulin y Peleg, 1982).

Definición 2.6 (Monotonía)

Un método de votación f cumple la ***Propiedad de Monotonía*** si para cualquier par de perfile p y p' (donde el perfil p' ha sido obtenido de p mediante un único intercambio a favor de x), y para todo candidato $x \in X$, si $x \in f(X, p)$, entonces $x \in f(X, p')$.

Así, según esta propiedad, un procedimiento no es monótono si al mejorar la posición de un candidato en el perfil de preferencias, manteniendo al resto de candidatos inalterados en sus relaciones entre sí, deja de formar parte del conjunto de ganadores y, por lo tanto, resulta claramente perjudicado.

Definición 2.7. (Monotonía Estricta)

Un método de votación f cumple la ***Propiedad de Monotonía Estricta*** si para cualquier par de perfiles p y p' (donde el perfil p' ha sido obtenido de p mediante un único intercambio a favor de x), para todo candidato $x \in X$, si $x \in f(X, p)$, entonces $f(X, p) = \{x\}$.

Por lo tanto, un método de votación satisface la propiedad de Monotonía Estricta siempre que tras mejorar la posición de un candidato en el perfil de preferencias, manteniendo al resto de candidatos inalterados en sus relaciones entre sí, dicho candidato no sólo se mantiene en el conjunto de ganadores sino que se convierte en el único ganador.

Como podemos observar a partir de estas definiciones, el incumplimiento de cualquiera de estas propiedades de Monotonía supondría una inconsistencia entre los cambios en las preferencias de los votantes y los resultados obtenidos puesto que, como consecuencia de un apoyo adicional a favor de un determinado candidato ganador, este podría resultar perjudicado no siendo elegido.

En este sentido, y en relación a los distintos métodos de votación definidos en la Sección 2.3.1 considerados como correspondencias de votación, es decir, métodos de votación no resolutivos donde el resultado puede ser más de un único candidato ganador, existen ya algunos resultados importantes en cuanto a su cumplimiento de algunas de las propiedades de Monotonía definidas anteriormente.

Nurmi (1999) establece que todos los métodos Posicionales con Descarte y, por tanto, todos los aquí definidos, son no monótonos. Sin embargo, todos los métodos Posicionales son monótonos (Moulin, 1988b), aunque no necesariamente estrictamente monótonos.

Por otro lado, y para los métodos Condorcet, Fishburn (1977) demuestra que de los métodos Condorcet definidos, sólo el métodos de Dogson incumple la propiedad de Monotonía y, sin embargo, Nurmi (1987) también demuestra que métodos como Copeland, Ciclo superior y MaxMin, entre otros, incumplen la propiedad de Monotonía Estricta, mientras otros, como el método de Black sí es estrictamente monótono.

Por último, y dado que el incumplimiento de las propiedades de Monotonía supone la posibilidad de cambios en los resultados de la elección como respuesta a cambios en las preferencias de los votantes, su análisis es también relevante en la investigación relativa a la problemática de la manipulación o implementación de los métodos de votación. Para un análisis en profundidad de las propiedades de monotonía y su relación con estas cuestiones véase Moulin (1983, 1994) y Taylor (2005).

2.4.2. Participación y Paradoja de la Abstención.

Otra propiedad relacionada con cambios en las preferencias de los votantes es la Propiedad de Participación, cuyo análisis en profundidad constituye el núcleo de la investigación desarrollada en el próximo capítulo.

En concreto, el cumplimiento de la propiedad de Participación requiere, de un modo simple, que nunca debería resultar ventajoso para un votante abstenerse en lugar de votar de acuerdo con sus verdaderas preferencias, en el sentido de que el resultado obtenido cuando decide no votar sea más preferido, bajo condiciones caeteris paribus, que el que se obtendría si decidiese votar.

De nuevo, por lo tanto, y al igual que ocurría con la propiedad de Monotonía, el cumplimiento por un método de votación de la propiedad de Participación representa un punto a su favor, al refrendar la racionalidad individual de los votantes y su comportamiento honesto a la hora de efectuar el voto.

La propiedad de Participación, como tal, fue definida inicialmente por Moulin (1988a) en el contexto de las funciones de votación, métodos de votación resolutivos, para indicar que, si en una situación dada se elige a un candidato x y se añade un nuevo votante que prefiere dicho candidato x a otro candidato y, no debería darse el caso de que y fuese el ganador de la nueva situación, es decir, el nuevo votante (e igualmente el candidato inicialmente ganador x) no debería salir perjudicado simplemente por haber tomado la decisión de votar. De un modo más formal:

Definición 2.8. (Participación)

Una función de votación f cumple la ***Propiedad de Participación*** si para cualquier par de situaciones (X, p) y (X, v), donde el perfil v es unánime, tenemos que si $f(X, p) = \{x\}$ y $x >_v y$, entonces $f(X, p + v) \neq \{y\}$.

De este modo, si continuamos analizando los distintos métodos de votación en relación a su respuesta ante cambios en las preferencias de los votantes, el incumplimiento de la propiedad de Participación así definida abre la posibilidad de que, como consecuencia de que un votante o grupo de votantes con idénticas preferencias decidan no votar pueden conseguir la elección de un candidato que es más preferido que el que obtendrían si votaran de acuerdo a sus verdaderas preferencias.

Hay que señalar que ahora el cambio en las preferencias de los votantes, a diferencia de lo que ocurría en el caso de la Monotonía, no se produce directamente en el perfil de los votantes en una situación dada, sino que está ocasionado directamente por la decisión de votar o no.

La posibilidad de que un votante decida abstenerse dado que su voto supondría la elección de un candidato que le es menos preferido se conoce con el nombre de ***Paradoja de la Abstención*** (*No-show Paradox,* Brams y Fishburn, 1983).

En este sentido, y para el caso de funciones de votación, Moulin (1988a) establece el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Moulin, 1988a)

Ninguna función de votación f consistente con el principio de Condorcet satisface la propiedad de Participación.

Dicho de otro modo, todos los métodos Condorcet resolutivos se ven sometidos a la Paradoja de la Abstención. Es decir, en toda función de elección social existe alguna situación en la que un votante (o grupo de votantes) con su voto sincero logra empeorar su situación (obtener un resultado menos preferido) en comparación con el resultado obtenido si decidiese no votar. Sin embargo, como se señala también en Moulin (1988b), los métodos Posicionales están libres de esta paradoja.

En este punto, y puesto que tanto el incumplimiento de Monotonía como el de Participación suponen la aparición de resultados inconsistentes en la elección como consecuencia de modificaciones en las preferencias de los votantes, cabría preguntarse si existe una relación entre el incumplimiento de ambas propiedades.

Una primera cuestión que podría surgir en este sentido es si la falta de Monotonía y el incumplimiento de Participación son equivalentes. La respuesta es no. Como señala Nurmi (1983) el método de Copeland, por ejemplo, que es un método Condorcet y, por lo tanto, vulnerable a la Paradoja de la Abstención, es monótono. Sin embargo, otro método Condorcet, el método de Dogson, incumple las dos propiedades. Podríamos entonces preguntarnos si, a pesar de que no existe una relación de equivalencia, aún se puede afirmar que todas las funciones de votación no monótonas son vulnerables a la Paradoja de la Abstención. La respuesta de Campbell y Kelly (2002) es, de nuevo, negativa:

Teorema 2.2 (Campbell y Kelly, 2002)

La no Monotonía no implica la Paradoja de la Abstención.

De hecho, estos autores dan ejemplos de funciones de votación que son no neutrales, anónimas y no monótonas y, sin embargo, son invulnerables a la Paradoja de la Abstención.

Ahora bien, lo que quizás es más importante de sus resultados es que, si exigimos que las funciones de votación sean no discriminatorias, es decir, que sean anónimas y neutrales (como es el caso de la mayoría y, en concreto, de todos los métodos de votación definidos es este capítulo), sí es posible concluir que el incumplimiento de Monotonía implica el incumplimiento de Participación y, por tanto, la aparición de la Paradoja de la Abstención.

Por último, también es importante tener en cuenta que, el análisis de la propiedad de Participación y, por lo tanto, la aparición de la Paradoja de la Abstención, también es relevante desde un punto de vista estratégico. Esto es así porque, en cierto modo, este tipo de paradoja puede verse también como un tipo especial de manipulación, ya que su aparición en un método de votación supone un incentivo para que los votantes no expresen sus preferencias de un modo sincero y decidan no votar, al existir la posibilidad de que su voto les provoque un peor resultado.

Aclaremos un poco más todas estas cuestiones mediante el siguiente ejemplo ilustrativo:

Ejemplo 2.3

Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un conjunto con cuatro candidatos.

Dado el perfil p con 32 votantes:

11 votantes: $x_4 > x_3 > x_2 > x_1$

8 votantes: $x_1 > x_3 > x_2 > x_4$

7 votantes: $x_2 > x_1 > x_4 > x_3$

2 votantes: $x_2 > x_1 > x_3 > x_4$

2 votantes: $x_4 > x_2 > x_1 > x_3$

2 votantes: $x_3 > x_1 > x_2 > x_4$

La matriz de comparaciones correspondiente, M_p, es:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		10	19	19
x_2	22		11	19
x_3	13	21		12
x_4	13	13	20	

Comprobemos que el método MaxMin, visto como método resolutivo o función de votación, está sometido al Teorema de Moulin, es decir, incumple Participación y, por tanto, incurre en la Paradoja de la Abstención.

En efecto, para el método MaxMin, tal como se ha definido anteriormente, el único elegido es x_4, ya que el término mínimo de su fila correspondiente, 13, es el máximo.

Añadamos ahora a este perfil un conjunto v de 3 votantes con la misma papeleta: $x_1 > x_4 > x_2 > x_3$.

La nueva matriz de comparaciones, M_{p+v}, sería:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		13	22	22
x_2	22		14	19
x_3	13	21		12
x_4	13	16	23	

En esta nueva situación, sólo sería elegido x_2, cuyo término mínimo, 14, es ahora el máximo.

En conclusión, cada uno de esos 3 nuevos votantes añadidos observan que, al votar, han provocado la elección de un candidato, x_2, que prefieren menos que el ganador en caso de haberse abstenido, x_4.

Dicho de otro modo, esos votantes podrían decidir que es mejor para ellos abstenerse que votar de acuerdo a sus verdaderas preferencias, porque en caso de hacerlo, el resultado de la votación es un candidato, x_4, más preferido para ellos que x_2, el que resultaría elegido si hubiesen votado y, por tanto, pueden manipular la elección decidiendo quedarse en casa.

Hemos comprobado entonces que el método Maximin, que es un método Condorcet, visto como función de votación, está sujeto al resultado de Moulin y sometido de este modo a la Paradoja de la Abstención y a la posibilidad de ser manipulado mediante la abstención.

Es evidente que este mismo análisis el válido para todos los métodos Condorcet anteriormente definidos, siempre que, una vez más, los consideremos como métodos de votación resolutivos. Comprobémoslo pues también, por ejemplo, para los métodos de Black, Kemeny y Dogdson.

Efectivamente, el único candidatos elegido es x_2, tanto para el método de Black (por tener x_2 una puntuación de Borda de 52, que es máxima), como para el método de Kemeny (por ser x_2 el primero de la única lista óptima de Kemeny, que es $x_2 > x_1 > x_4 > x_3$, con resultado de 110), como para el método de Dogdson (por ser x_2 el candidato que menos intercambios elementales necesita para convertirse en candidato Condorcet, ya que le bastaría intercambiarse con x_3 en seis de los primeros once votantes).

Si ahora se añadiera un conjunto v de 9 votantes todos con la papeleta de voto $x_2 > x_3 > x_1 > x_4$, estaríamos en una situación con 41 votantes, en la que la nueva matriz de comparaciones, M_{p+v}, sería:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		10	19	28
x_2	31		20	28
x_3	22	21		21
x_4	13	13	20	

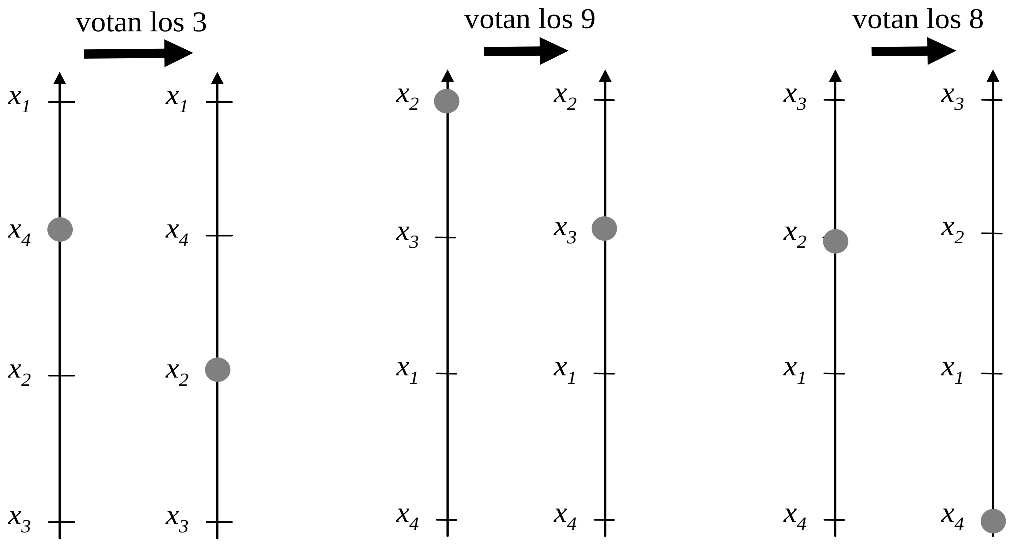
en la que el candidato x_3 es candidato de Condorcet y, por tanto, el único elegido para todos ellos.

En conclusión, una vez más, cada uno de esos nuevos votantes observa que al votar han provocado la elección de un candidato, x_3, que prefieren menos que el ganador en caso de haberse abstenido, su favorito x_2 y, por tanto, todos estos métodos incurren en la Paradoja de la Abstención de forma que los nuevos votantes añadidos pueden decidir abstenerse en su beneficio manipulando así el resultado.

De manera análoga, aunque también sabemos que ningún método Posicional incurre en la paradoja, sí lo hace alguno de los Posicionales con Descarte.

Veamos ahora el caso de Pluralidad con Descarte, donde en caso de empate eliminaremos por orden alfanumérico. Los dos candidatos inicialmente elegidos son x_2 y x_4 (con 9 y 13 primeros puestos, respectivamente), siendo x_2 el ganador final, pero al añadir 8 nuevos votantes con la papeleta $x_3 > x_2 > x_1 > x_4$, en la nueva situación los inicialmente elegidos serían x_3 y x_4 (con 10 y 13 primeros puestos, respectivamente), siendo x_4 el ganador final, dada la regla de desempate utilizada. Así pues, los nuevos votantes provocan con su voto que sea elegido su antifavorito, x_4, en lugar de su segundo candidato más preferido, x_2.

La Figura 2.5 a continuación, aclara gráficamente todos los resultados anteriores indicando, para cada uno de los métodos indicados, las preferencias de los nuevos votantes mediante las líneas verticales, y los candidatos ganadores con los puntos más gruesos:



MinMax:
Nuevos vot. (3): $x_1 > x_4 > x_2 > x_3$

Black, Kemeny y Dogdson:
Nuevos vot. (9): $x_2 > x_3 > x_1 > x_4$

Pluralidad con descarte:
Nuevos vot. (8): $x_3 > x_2 > x_1 > x_4$

Figura 2.5 Ejemplo de "Paradoja de la Abstención (conjuntos unitarios de ganadores)

Supongamos ahora que tratamos de extender el Teorema de Moulin y, por tanto, los resultados iniciales de Participación, del contexto de las funciones de votación al contexto más general de las correspondencias de votación. En ese caso, lo primero que hay que tener en cuenta es que, dado que tanto el cumplimiento de una determinada propiedad de Participación como su incumplimiento (Paradoja de la Abstención) vienen determinados en base a las preferencias de los votantes en relación a los resultados obtenidos ahora, en correspondencias de votación, dichos resultados ya no son candidatos individuales sino subconjuntos de candidatos

Aclaremos esto volviendo al Ejemplo 2.3, pero suponiendo ya que estamos en el contexto de los métodos de votación no resolutivos y, por tanto, que el resultado de la elección puede ser cualquier subconjunto de candidatos. Comprobemos si el método de Copeland y el Elige-Todos incurren en una cierta versión de la paradoja.

Como se ve en la Figura 2.6 el conjunto de ganadores del método de Copeland es $\{x_1, x_2\}$, pues ambos consiguen dos victorias. Si añadimos ahora 9 nuevos votantes con la misma papeleta: $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$, en la nueva situación con 41 votantes el conjunto de ganadores sería $\{x_1, x_2, x_3\}$.

De igual modo, los ganadores en el método Elige-Todos son, en la situación inicial, puesto que no existe un candidato Condorcet, el conjunto total de candidatos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si añadimos 7 nuevos votantes con la misma papeleta: $x_3 > x_4 > x_2 > x_1$, en la nueva situación con 39 votantes el único ganador, puesto ahora es candidato Condorcet, sería $\{x_4\}$.

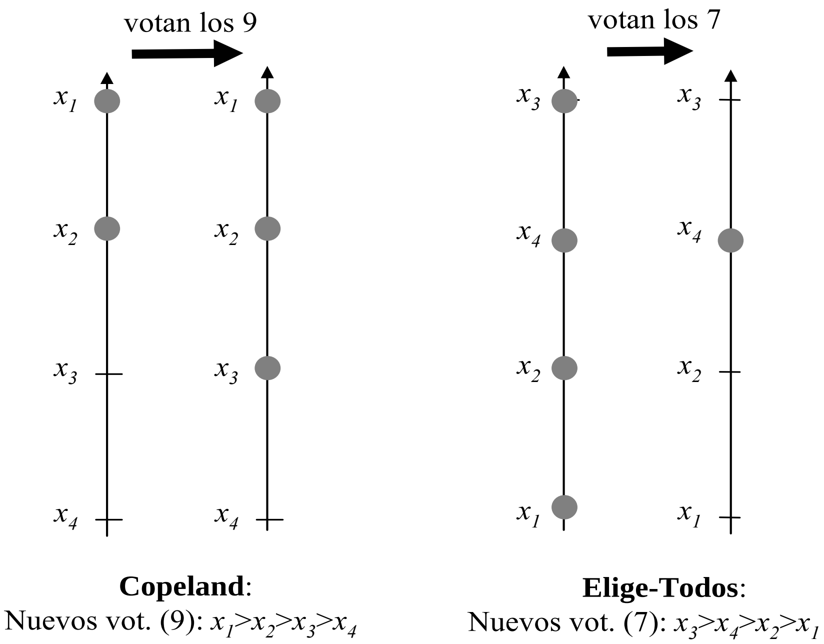


Figura 2.6 Paradoja de la Abstención (conjuntos no unitarios de ganadores)

En ambos casos, para determinar si ha tenido lugar la paradoja de la Abstención, tendremos que comparar, de nuevo, los resultados de la elección antes y después de que los nuevos votantes realicen su voto, pero teniendo en cuenta que ahora, a diferencia de lo que ocurría anteriormente en la Figura 2.5, los ganadores ya no son candidatos individuales sino subconjunto de candidatos.

Así como en el caso del método de Copeland parece lógico pensar que los nuevos votantes prefieren el resultado primero $\{x_1, x_2\}$, al segundo $\{x_1, x_2, x_3\}$ y, por tanto, el ir a votar les ha perjudicado (produciéndose por tanto un tipo especial de paradoja), hay otros casos en que la comparación no es tan clara.

Por ejemplo, en el caso del método Elige-Todos., el conjunto inicial de ganadores es $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, y el final únicamente el candidato $\{x_4\}$. ¿Cuál de estos conjuntos candidatos es preferido por los nuevos votantes?

Para responder a esa respuesta y poder determinar si realmente la paradoja ha tenido lugar, será necesario, en primer lugar, extender las preferencias de los votantes, expresadas a través de órdenes lineales sobre candidatos individuales, a subconjuntos de candidatos.

Es precisamente esa necesidad lo que hace, como veremos a continuación, que la investigación de la problemática de la Participación y la manipulación mediante la abstención y, más en concreto, la tarea de extender el Teorema de Moulin al contexto más amplio de las correspondencias de votación (lo que constituye la parte esencial del Capítulo 3), presente una primera analogía con la investigación desarrollada en relación a la manipulación en general y la extensión del Teorema de Gibbard-Satterwaite a este mismo contexto.

El Teorema de Gibbard-Satterhwaite establece (expresándolo de manera intuitiva) que toda función de elección social y, por tanto, toda función de votación (con un candidato ganador único) es manipulable, salvo que sea dictatorial. Para este tipo de funciones es muy natural y fácil de definir la manipulación: una función f es manipulable si dada una situación (X, p), existe un votante v con un orden de preferencias p_v que cambia ese orden por otro p_v' de tal forma que, si sustituimos en el perfil de preferencias inicial p, sus verdaderas preferencia p_v por p_v', en la nueva situación (X, p') el candidato ganador $\{x\}= f(X, p')$ es estrictamente preferido por ese votante al candidato ganador en la situación inicial $\{y\}= f(X, p)$ y, por lo tanto, es más conveniente para el votante v, falsear sus preferencias verdaderas y votar de acuerdo a p_v'.

En resumen, en el contexto de los métodos de votación resolutivos, determinar si una función de votación es manipulable por un votante v consiste simplemente en observar si en su orden de preferencias individuales p_v, el candidato ganador cuando actúa estratégicamente está situado por encima del candidato ganador cuando vota de acuerdo a sus verdaderas preferencias.

Ahora bien, en el teorema de Gibbard-Satterthwaite, al igual que en el Teorema de Moulin, la suposición inicial es que los ganadores son únicos. Si abandonamos esta hipótesis y nos situamos en el contexto general de los métodos de votación no resolutivos, correspondencias de votación, donde el resultado de la elección es un subconjunto de candidatos, la problemática del análisis de la manipulación se complica. De hecho, podemos pensar en correspondencias de votación que intuitivamente parecen ser no manipulables, por ejemplo, el método de votación que establece que todos los candidatos son ganadores, independientemente de las preferencias de los votantes (un ejemplo muy poco interesante), o el método de votación que toma como candidatos ganadores a todos los que tengan al menos un primer puesto en las preferencias de los votantes.

Está claro que en los dos casos anteriores ningún votante encontraría beneficioso modificar sus verdaderas preferencias, porque eso no cambiaría el resultado de la elección. La cuestión es, ¿por qué hablamos sólo de estos dos métodos de votación, tan poco atractivos, como "intuitivamente" los únicos no manipulables? Porque ahora, en el contexto general de las correspondencias de votación, partiendo de las preferencias de los votantes, que continúan siendo órdenes lineales sobre los candidatos individuales, ya no es del todo claro determinar, qué significa que se prefiere un determinado subconjunto de candidatos ganadores a otro.

Por ejemplo, si un grupo de votantes sitúa en sus preferencias al candidato x sobre el candidato y, a éste sobre z y al candidato z sobre t, $x > y > z > t$, ¿qué prefieren entonces como resultado de la elección?, el conjunto formado por los candidatos $\{x, t\}$, o el formado por los candidatos $\{x, y, z\}$. La respuesta, al igual que para el caso del método de Copeland y Elige-Todos en el Ejemplo 2.3, ya no es tan evidente, dependerá de las preferencias de los votantes en relación a esos subconjuntos de candidatos, lo cual nos lleva a la utilización de principios de extensión de las preferencias de órdenes sobre elementos (candidatos) a órdenes entre conjuntos que sean coherentes con dichas ordenaciones elementales.

Entonces, tanto si la manipulación tiene lugar en general, como consecuencia del falseamiento de las preferencias por parte de los votantes, como si ésta se produce por su decisión de abstenerse, debemos resolver primero el problema de la extensión de las preferencias.

2.5. El problema de extensión de las preferencias: Órdenes e Implicaciones.

Consideremos un votante i, y sea X el conjunto de candidatos. Representemos, tal y como hemos venido haciendo, mediante un orden lineal P_i las preferencias del votante v sobre los elementos (candidatos) del conjunto X, y consideremos a continuación dos subconjuntos no vacíos A y B de X, ¿Qué significaría para este votante decir que el conjunto A es preferido al conjunto B? Obviamente la respuesta dependerá del orden lineal P_i de preferencias de dicho votante, pero ¿será dicho orden de preferencias suficiente para establecer la preferencia del votante entre los conjuntos A y B? Como se muestra a continuación la respuesta es No.

Por ejemplo, si uno mismo tiene que hacer la elección, basándose exclusivamente en sus preferencias individuales, podría usar si, cree que la elección final la hará algún buen amigo (con preferencias parecidas a las suyas), una regla MaxMax y elegir el conjunto A si su candidato preferido en A es mejor que su mejor candidato en B. Ahora cien, si nuestro peor enemigo es el que tiene que hacer la elección final, entonces podría preferir utilizar una regla MaxMin, y elegir A si el peor resultado en A es mejor que el peor en B.

Por otro lado, si uno no está seguro de quien realizará la elección final, podría usar una regla MaxMin mixta y elegir A si la media ponderada de su mejor y peor resultado es mayor en A que en B. O si no se tiene ni idea de la probabilidad de que cualquiera de los resultados posibles salga elegido, puede establecer sus preferencias maximizando la utilidad esperada que le reporten los conjuntos A y B.

Usemos un ejemplo concreto para clarificar estas ideas. Supongamos una situación de votación (X, p) en la que $X = \{x, y, z, t\}$:

a) Un votante i con preferencias P_i: x > y > z > t, diría que prefiere (estrictamente) $A = \{x, z\}$ a $B = \{t\}$ a pesar del hecho de que no conoce nada sobre el proceso de desempate.

b) Un votante i con preferencias P_i: x > y > z > t, diría que prefiere (estrictamente) $A = \{x, z, t\}$ a $B = \{y\}$ porque conoce que una persona con las mismas preferencias será el encargado de desempatar. Lo mismo diría un votante Optimista (en el sentido de que cree que el candidato que será finalmente escogido como ganador será su favorito en el conjunto de resultados).

c) Un votante i con preferencias P_i: $x > y > z > t$, con función de utilidad $U_i(x) = 3$, $U_i(y) = 2$, $U_i(z) = 1$ y $U_i(t) = 0$, y con probabilidades a priori $\boldsymbol{q_i}(x) = \boldsymbol{q_i}(z) = \boldsymbol{q_i}(t) = 1/6$, $\boldsymbol{q_i}(y) = ½$, preferiría (estrictamente) $B = \{y\}$ a $A = \{x, z, t\}$ porque $UE_i(B) = 1 > UE_i(A) = 4/6$.

d) Un votante i con preferencias P_i: $x > y > z > t$, función de utilidad $U_i(x)=8$, $U_i(y) = 3$, $U_i(z) = 1$ y $U_i(t) = 0$, y con probabilidades a priori iguales a ($\boldsymbol{q_i}(u) = ¼$ para todo $u \in X$), preferiría (estrictamente) $A = \{x, t\}$ a $B = \{y, z\}$ porque $UE_i(A) = 2 > UE_i(B) = 1$.

Así pues, uno puede distinguir al menos tres tipos de situaciones donde el "problema de extensión" no es trivial en la Teoría de las Votaciones, y que están estrechamente relacionados con la información que, más allá de su orden de preferencias, se posee acerca de cómo los votantes valoran las diferentes alternativas o de cómo se realizará la elección final sobre un resultado que contiene más de una alternativa:

1) Los votantes ignoran por completo cuan probable es cualquiera de los resultados posibles, es decir, no hay información sobre probabilidades (no existe un sistema de desempate establecido, o es determinístico) o sobre cualquier valoración de las distintas alternativas que no sea, para cada votante, su orden de preferencias individuales. El problema entonces es determinar, a partir de ahí, un orden que haga posible comparar subconjuntos no vacíos de resultados.

2) Un modo alternativo de abordar las preferencias entre conjuntos sin utilizar una información específica sobre probabilidades, es suponer que el votante puede determinar sus utilidades en relación a las alternativas, pero no tiene certeza de cómo se desarrollará el procedimiento que determinará el resulta final. El votante entonces puede maximizar la *utilidad media*, es decir, tratar todos los resultados como igualmente posibles. Así, un subconjunto A es elegido frente a un subconjunto B si la suma de las *utilidades* dividido por el número de candidatos en el conjunto correspondiente, es mayor para A que para B.

3) Por último, podemos establecer la relación entre A y B en base a un cálculo que haga uso de alguna función de utilidad que representa la preferencias de los votantes y una o más funciones de probabilidad que den una medida de la posibilidad de que una alternativa dada sea elegida en última instancia como resultado final. Diremos entonces que el subconjunto A es el elegido, si tiene una *utilidad esperada* mayor que el subconjunto B.

2.5.1. Algunos órdenes sobre el conjunto de subconjuntos.

Supongamos que partimos de un orden individual estricto P sobre un conjunto X de alternativas, y pretendemos extender ese orden individual P a una relación $\mathcal{P}$ entre subconjuntos de alternativas de X. Si A y B son subconjuntos de X, entonces, el significado de $A\mathcal{P}B$, es que si un votante tiene una ordenación de preferencias P, juzga que el resultado A es estrictamente mejor que B.

Partiendo de lo anterior, en la siguiente Definición 2.9 se presentar algunos órdenes que son extensiones sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de candidatos, obtenidos a partir de un orden lineal P definido sobre el conjunto X de candidatos individuales.

Señalar que, los primeros órdenes así definidos, algunos bien conocidos y otros nuevos, se enmarcarían todos dentro del apartado 1) de la sección anterior. Es decir, los votantes ordenan los distintos conjuntos de candidatos en función de un determinado orden sin tener más información que sus propias preferencias individuales.

Definición 2.9 (Órdenes entre Conjuntos basados en Órdenes Lineales)

Dado un votante *i*, y un orden lineal $P: x_1 > x_2 > ... > x_n$ que expresa las preferencias de este votante sobre los candidatos individuales en *X*, para todo par (*A, B*) de subconjuntos no vacíos de *X*, definimos:

a) *Orden DF* (*Dominación Fuerte*)

$$A\ \mathbf{DF_P}\ B\ si\ (\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ xPy)$$

(*A* es preferido a *B* de acuerdo con *P* en el sentido de Dominación Fuerte si todo candidato en *A* es estrictamente preferido a todo candidato en *B*)

Este primer orden entre conjuntos sería el de mayor exigencia y, por lo tanto, el más natural para cualquier tipo de votante (en contrapartida, sería el que menos conjuntos ordena)

b) *Orden DD* (*Dominación Débil*)

$$A\ \mathbf{DD_P}\ B\ si\ (\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ x=y\ o\ xPy)\ \text{y}$$
$$[(\exists x \in A,\ (xPy\ \ \forall y \in B))\ \text{o}\ (\exists y \in B,\ (xPy\ \ \forall x \in A))]$$

(Todo candidato en *A* es al menos tan preferido a todo candidato en *B*, y al mismo tiempo existe un candidato en *A* estrictamente preferido a todo candidato *B* o existe un candidato en *B* para el cual todo candidato en *A* es estrictamente preferido)

c) *Orden CDD* (*Casi Dominación Débil*)

$$A\ \mathbf{CDD_P}\ B\ si\ (\forall x \in A\text{-}B,\ \forall y \in B,\ xPy)\ \text{y}\ \mathbf{(}\forall x \in A,\ \forall y \in B\text{-}A,\ xPy)\ \text{y}\ (\exists x \in A\text{-}B\ o\ \exists y \in B\text{-}A)$$

(Todo candidato en *A* pero no en *B* es estrictamente preferido a todo candidato en *B*, y todo candidato en *A* es estrictamente preferido a todo candidato en *B* pero no en *A*, y existe un candidato en *A* pero no en *B* o un candidato en *B* pero no en *A*).

d) *Orden OptyPes* (*Orden para Optimistas y Pesimistas*)

$$A\ \mathbf{OptyPes_P}\ B\ \text{sii}\ \mathbf{(}Max_P\ A\ P\ Max_P\ B)\ \text{y}\ \mathbf{(}Min_P\ A\ P\ Min_P\ B)$$

(El candidato más preferido en *A* es estrictamente preferido al más candidato más preferido en *B* y el candidato menos preferido en *A* es estrictamente preferido al candidato menos preferido en *B*).

e) *Orden Opt* (*Orden para Optimistas*)

$$A\ \mathbf{Opt_P}\ B \text{ si } Max_P\, A\ P\ Max_P\, B$$

(El candidato más preferido en *A* es estrictamente preferido al candidato más preferido en *B*).

f) *Orden Pes* (*Orden para Pesimistas*)

$$A\ \mathbf{Pes_P}\ B \text{ si } Min_P\, A\ P\ Min_P\, B$$

(El candidato menos preferido en *A* es estrictamente preferido al candidato menos preferido en *B*)

g) *Órdenes LexiMax y LexiMin*

$$A\ \mathbf{LexiMax_P}\ B \text{ si}$$

1) $\max_P A\ P\ \max_P B$ o
2) $\max_P A = \max_P B$ y $[(A_1 = \varnothing$ y $B_1 \neq \varnothing)$ o $\max_P(A_1)\ P\ \max_P(B_1)]$ o
3) $\max_P A_1 = \max_P B_1$ y $[(A_2 = \varnothing$ y $B_2 \neq \varnothing)$ o $\max_P(A_2)\ P\ \max_P(B_2)]$ o
4) y así sucesivamente… (donde $A_j = A_{j-1} - \max_P A_{j-1}$ y $B_j = B_{j-1} - \max_P B_{j-1}$, para j > 1)

En otras palabras, si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_h\}$, donde $a_1 < a_2 < \ldots < a_h$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, donde $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, *A* LexiMax$_P$ *B* significa que $h < k$ y $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_h = b_h$ o existe un *s* tal que $0 \le s < h$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_s = b_s$ y $a_{s+1} P b_{s+1}$.
Reemplazando *max* por *min* se obtiene la definición del orden *LexiMin*.

h) *Orden LMM* (*Orden LexiMaxMin*)

$$A\ \mathbf{LMM_P}\ B \text{ si } A\ LexiMax_P\ B \text{ y } A\ LexiMin_P\ B$$

obsérvese que todos los órdenes definidos de (a) a (g) son asimétricos (si $A\mathbf{O_P}B$ entonces $B \not{O}_P A$).

A continuación, los cuatro órdenes de extensión que aparecen en la Definición 2.10 son bien conocidos y se enmarcarían en los apartados 2) y 3) de la Sección 2.5 Es decir, describen situaciones que incorporan la posibilidad de que a la hora de ordenar conjuntos, no sólo contáramos con la información contenida en el orden de preferencias de cada votante, sino con información de algún tipo de función de utilidad que mida la intensidad de las preferencias de un votante entre las distintas alternativas (candidatos), y alguna función de probabilidad que determine la posibilidad de que determinada alternativa (candidato) sea finalmente elegida entre un subconjunto inicial de las ganadores.

Detallemos en mayor medida lo que aquí se está indicando. Si suponemos que el proceso de votación terminará eligiendo al final un único candidato ganador, y que esta selección única será el resultado de una regla de desempate (determinística o probabilística) aplicada al conjunto que resulte de la votación entonces, un votante dirá que prefiere el conjunto A al conjunto B si, basándose en su conocimiento (quizás privado) sobre la regla de desempate y la naturaleza de sus propias preferencias sobre los candidatos, estima que el conjunto de resultado A tiene un mejor pronóstico general de conducir a un único ganador mejor que el conjunto B.

Podemos modelizar el proceso de comparación de conjuntos de resultados suponiendo que el votante i ve los diferentes resultados como loterías (especificando la probabilidad de cualquier candidato en el conjunto de convertirse en único ganador) y tiene una función de utilidad de tipo Von-Neumann para la familia de loterías (especificando en particular la utilidad asignada al hecho de que cualquier candidato dado sea el único ganador).

Más en concreto, podemos establecer que una ***función de utilidad*** como una asignación de números reales a los elementos del conjunto de alternativas X. Y diremos que la función de utilidad u se ajusta al orden de preferencias P si ocurre que $\forall x, y \in X$ se cumple que xPy si y sólo si $u(x) \geq u(y)$.

Además de esta información cardinal sobre las distintas alternativas, otro tipo de información adicional haría referencia al modo en que se efectuará la elección final sobre el resultado que ya sabemos que, puesto que estamos tratando con correspondencias de votación, contiene más de una alternativa.

La elección de ese resultado final puede estar ya especificada en la propia definición de la correspondencia, en el sentido de que será un *presidente*, o algún subgrupo de votantes, o una lotería dada, el que lo determine. Pero puede suceder que lo que determine ese resultado final sea un mecanismo aleatorio.
En este sentido, por simplicidad, y siguiendo a Barberá et al. (2001) y otros, supondremos que cada votante tiene una distribución de probabilidad a priori $\boldsymbol{q_i}$ con soporte completo ($\boldsymbol{q_i}(x) > 0$ para todo $x \in X$) y que las probabilidades de la lotería correspondiente al resultado A son actualizaciones Bayesianas de $\boldsymbol{q_i}$ (para todo $z \in A$, $\boldsymbol{q_{i,A}}(z) = \dfrac{\boldsymbol{q_i}(z)}{\sum_{y \in A} \boldsymbol{q_i}(y)}$).

Necesitamos un último concepto. Dada una función de utilidad u y una lotería de elección $\boldsymbol{q_i}$, definimos la ***Utilidad Esperada*** (*UE*) de un subconjunto A de X de una manera estándar como:

$$UE(\boldsymbol{q_i}, \mathrm{A}) = \sum_{x \in A} u(x) q_i(x).$$

En este contexto, podemos decir que un votante Bayesiano prefiere A a B significa que la utilidad esperada de A, $UE(\boldsymbol{q_i}, A)$, el mayor que la de B para este votante.

Es decir, ahora los votantes incluidos en los apartados 2) y 3) ordenan los distintos conjuntos de candidatos, teniendo en cuenta que poseen una función de utilidad en relación a las distintas alternativas y, además, en el caso 2) no conocen nada más, mientras que en el caso 3) poseen además información adicional en relación a la probabilidad de que cada resultado ocurra y, por tanto, en esos casos, maximizan la Utilidad Esperada (UE).

Es de destacar que, en relación a los cuatro órdenes que siguen el primero y el segundo son asimétricos, pero el tercero y el cuarto no.

Definición 2.10(Órdenes entre Conjuntos dada una función de Utilidad)

Dado un orden lineal P: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ sobre el conjunto de candidatos individuales X, para todo par (A, B) de subconjuntos no vacíos de X, defino:

a) *Orden TVB* (*Orden para Todos los Votantes Bayesianos*)
A ***TVB$_P$*** *B si para toda función de utilidad U consistente con P y para toda distribución a priori de probabilidad* **q** *sobre X, UE* (***q***, *A*) > *UE* (***q***, *B*).

(Esto significa que *A* es preferido a *B*, en el sentido de la utilidad desperada, para *todos los votantes* con función de utilidad consistente con *P*, independientemente de los valores específicos de la función de utilidad y de la distribución de probabilidad a priori).

b) *Orden TVBU* (*Orden para Todos los Votantes Bayesianos con una distribución a priori Uniforme*)
A ***TVBU$_P$*** *B si para toda función de utilidad U consistente con P, UE* ($\boldsymbol{q}_U$, *A*) > *UE* ($\boldsymbol{q}_U$, *B*), donde $\boldsymbol{q}_U$ (x) = 1/$Card(X)$ *para todo* $x \in X$.

(*A* es preferido a *B*, en el sentido de la utilidad media esperada para una distribución a priori que asigna una probabilidad igual para todo candidato, para todos los votantes con función de utilidad consistente con *P*, independientemente de los valores específicos de la función de utilidad).

c) *Orden AVB* (*Orden para Algunos Votantes Bayesianos*)
A ***AVB$_P$*** *B si existe una función de utilidad U consistente con P, y una distribución de probabilidad a priori* **q** *sobre X, tal que UE* (***q***, *A*) > *UE* (***q***, *B*).
(*A* es preferido a *B*, en el sentido de la utilidad esperada, para algunos votantes con función de utilidad consistente con *P*, aquellos con una función de utilidad y una distribución a priori de probabilidad adecuadas).

d) *Orden AVBU* (*Orden para Algunos Votantes Bayesianos con distribución a priori Uniforme)*
A ***AVBU$_P$*** *B si existe una función de utilidad U consistente con P tal que UE* ($\boldsymbol{q}_U$, *A*) > *UE* ($\boldsymbol{q}_U$, *B*), donde $\boldsymbol{q}_U$(x) = 1/$Card(X)$ *para todo y* $x \in X$.

(*A* es preferido a *B*, en el sentido de la utilidad media esperada para una distribución de probabilidad a priori que asigna igual probabilidad para todo candidato, para algunos votantes con función de utilidad consistente con *P*, aquellos con una función de utilidad adecuada).

La Figura 2.7 presenta las implicaciones lógicas entre los órdenes definidos anteriormente. Así, que ***DF*** esté conectado a través de una flecha con, por ejemplo, ***DD*** significa que *A* $\boldsymbol{DF_P}$ *B* implica *A* $\boldsymbol{DD_P}$ *B*.

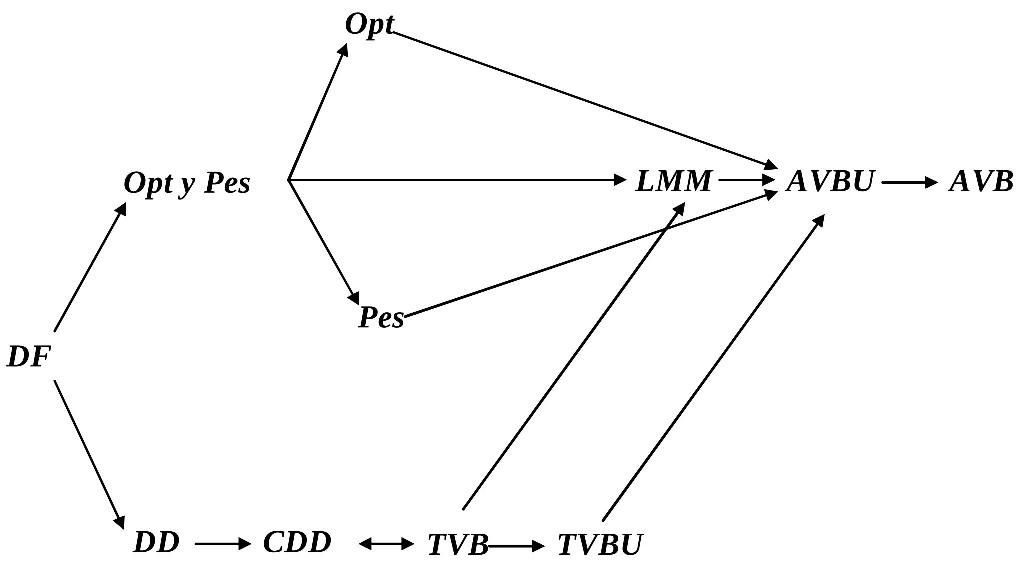


Figura 2.7.Órdenes entre conjuntos

La Figura 2.7 es completa en el sentido de que todas las implicaciones válidas están representadas por una flecha o deducidas por transitividad. La siguiente Proposición 2.2 muestra las implicaciones no triviales.

Señalar que en su demostración usaré la bien conocida propiedad de descomposición de las utilidades esperadas:

$$UE\,(\boldsymbol{q}, A) = \frac{\boldsymbol{q}(A_1)}{\boldsymbol{q}(A)} UE(\boldsymbol{q}, A_1) + \frac{\boldsymbol{q}(A_2)}{\boldsymbol{q}(A)} UE(\boldsymbol{q}, A_2),$$

donde $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ y $\boldsymbol{q}(S)$ significa $\sum_{y \in S} \boldsymbol{q}(y)$.

Proposición 2.2

a) ***CDD*** *es equivalente a* ***TVB***.

b) ***TVBU*** *no implica* ***LMM***.

c) ***TVB*** *implica* ***LMM, Opt*** *implica* ***AVBU*** *y* ***Pes*** *implica* ***AVBU***.

d) **(*Opt y Pes*)** *implica* ***LMM.***

e) ***LMM*** *implica* ***AVBU***.

f) **(*Opt y Pes*)** *no implica* ***TVBU*** *y* ***DD*** *no implica* ***Opt*** *ni* ***Pes***.

Demostración:

a) ***CDD*** *es equivalente a* ***TVB***. Para la demostración adaptamos la prueba del Lema 1 en Ching y Zhou (2002) al caso de un orden lineal *P* y a una distribución de probabilidad a priori con soporte completo $\boldsymbol{q}$.

Probemos, en primer lugar, que ***CDD*** *implica* ***TVB***. Sean *Y*, *Z* dos subconjuntos diferentes y no vacíos de *X* tal que *Y* $\boldsymbol{CDD_P}$ *Z*, donde *P* es el orden lineal $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$, *U* una función de utilidad consistente a con *P* y $\boldsymbol{q}$ una distribución a priori con soporte completo sobre *X*.

- Si $Y \cap Z = \varnothing$:

$$UE(\boldsymbol{q}, Y) = UE(\boldsymbol{q}, Y - Z) > UE(\boldsymbol{q}, Z - Y) = UE(\boldsymbol{q}, Z)$$

- Si $Y \cap Z \neq \varnothing$ y $Y - Z = \varnothing$:

$$\begin{aligned} UE(\boldsymbol{q}, Y) &= UE(\boldsymbol{q}, Y \cap Z) \\ &> \frac{\boldsymbol{q}(Z - Y)}{\boldsymbol{q}(Z)} UE(\boldsymbol{q}, Z - Y) + \frac{\boldsymbol{q}(Y \cap Z)}{\boldsymbol{q}(Z)} UE(\boldsymbol{q}, Y \cap Z) \\ &= UE(\boldsymbol{q}, Z) \end{aligned}$$

- Si $Y \cap Z \neq \varnothing$ y $Y - Z \neq \varnothing$:

$$\begin{aligned} UE\,(\boldsymbol{q},\, Y) &= \frac{\boldsymbol{q}(Y\text{ - }Z)}{\boldsymbol{q}(Y)} UE(\boldsymbol{q}, Y\text{ - }Z) + \frac{\boldsymbol{q}(Y \cap Z)}{\boldsymbol{q}(Y)} UE(\boldsymbol{q}, Y \cap Z) \\ &> UE(\boldsymbol{q}, Y \cap Z) \\ &\geq \frac{\boldsymbol{q}(Z\text{ - }Y)}{\boldsymbol{q}(Z)} UE(\boldsymbol{q}, Z\text{ - }Y) + \frac{\boldsymbol{q}(Y \cap Z)}{\boldsymbol{q}(Z)} UE(\boldsymbol{q}, Y \cap Z) \\ &= UE\,(\boldsymbol{q},\, Z). \end{aligned}$$

Por tanto, Y ***TVB$_P$*** Z.

Para demostrar la doble implicación, a continuación probamos que ***TVB*** *implica* **CDD.** En orden a demostrar por contradicción, sea Y y Z distintos y no vacíos de X, tal que Y ***CDD$_P$*** Z no se mantiene, donde P es el orden lineal $x_1 > x_2 > ... > x_n$. Uno de los dos casos siguientes tiene que ocurrir: o existe $z \in Z\text{-}Y$ e $y \in Y$ tal que zPy o existe $y \in Y\text{-}Z$ y $z \in Z$ tal que zPy.

Supongamos primero que estamos en el primer caso y sea $z = x_r \in Z\text{-}Y$, $y = x_s \in Y$ con $r < s$. Dado un número positivo suficientemente pequeño ε, sea U cualquier función de utilidad consistente con P satisfaciendo $U(z) = 1$, $U(y) = 0$, $1\text{-}\varepsilon < U(x_j) < 1+\varepsilon$, $\forall j<r$ y $-\varepsilon < U(x_j) < \varepsilon$, $\forall j>r$, y sea $\boldsymbol{q}$ cualquier distribución a priori con soporte completo sobre X satisfaciendo $\boldsymbol{q}(z) > 2/3$, $\boldsymbol{q}(y) > 1/4$ y $\boldsymbol{q}(x_j) < \varepsilon$, $\forall j \notin \{r, s\}$.

$$\begin{aligned} UE\,(\boldsymbol{q},\, Y) &= \frac{\boldsymbol{q}(y)}{\boldsymbol{q}(Y)} UE(\boldsymbol{q}, \{y\}) + \frac{\boldsymbol{q}(Y\text{ - }\{y\})}{\boldsymbol{q}(Y)} UE(\boldsymbol{q}, Y\text{ - }\{y\}) \\ &= \frac{\boldsymbol{q}(Y\text{ - }\{y\})}{\boldsymbol{q}(Y)} UE(\boldsymbol{q}, Y\text{ - }\{y\}) \\ &\underset{\varepsilon \to 0}{=} 0 < \frac{2}{3} \\ &\underset{\varepsilon \to 0}{<} \frac{\boldsymbol{q}(z)}{\boldsymbol{q}(Z)} + \frac{\boldsymbol{q}(Z\text{ - }\{z\})}{\boldsymbol{q}(Z)} UE(\boldsymbol{q}, Z\text{ - }\{y\}) \\ &= \frac{\boldsymbol{q}(z)}{\boldsymbol{q}(Z)} UE(\boldsymbol{q}, \{z\}) + \frac{\boldsymbol{q}(Z\text{ - }\{z\})}{\boldsymbol{q}(Z)} UE(\boldsymbol{q}, Z\text{ - }\{y\}) \\ &= UE(\boldsymbol{q},\, Z). \end{aligned}$$

Si ocurre el segundo caso el argumento es similar. Así pues, *Y* ***TVB_P*** *Z* no se mantiene.

b) ***TVBU*** *no implica* ***LMM***. Dado $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ donde $x_1Px_2P\ldots Px_6$, sea $Y = \{x_1, x_3\}$ y $Z = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$. Dado que para toda función de utilidad U consistente con P:

$$U(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Y) = \frac{1}{2}U(x_1) + \frac{1}{2}U(x_3) > \frac{2}{5}U(x_1) + \frac{3}{5}U(x_3)$$

$$> \frac{2}{5}UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, \{x_1, x_2\}) + \frac{3}{5}UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, \{x_4, x_5, x_6\})$$

$$= UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Z),$$

está claro que *Y* ***TVBU_P*** *Z*. Sin embargo, dado *Z* ***LexiMax_P*** *Y*, *Y* ***LMM_P*** *Z* no se mantiene.

c) Sean *Y* y *Z* dos subconjuntos de *X* tal que *Y* ***LMM_P*** *Z* no se sostiene. Si *Z* ***LexiMax_P*** *Y* entonces existe $z \in Z\text{-}Y$ tal que zPy para algún $y \in Y$. En este caso es obvio que *Y* ***CDD_P*** *Z* no se verifica. Un razonamiento análogo se aplica si *Z* ***LexiMin_P*** *Y*. Entonces, de todas formas *Y* ***CDD_P*** *Z* no se verifica. Por tanto, por contradicción, ***CDD*** *implica* ***LMM*** y. de forma inmediata, por a), ***TVB*** *implica* ***LMM.***

Para probar que ***Opt*** *implica* ***AVBU***, sea *Y* y *Z* conjuntos no vacíos de *X* tal que *Y* ***Opt_P*** *Z*, donde *P* es el orden lineal $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Existe un $y \in Y\text{-}Z$ tal que $yPz\ \forall z \in Z$. Dado un número positivo suficientemente pequeño ε, sea U cualquier función de utilidad consistente con P tal que $U(y) = 1$ y $-\varepsilon < U(x_j) < \varepsilon$, $\forall x_j \neq y$. Dado que

$$UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Y) = \frac{1}{Card(Y)}U(y) + \frac{Card(Y - \{y\})}{Card(Y)}UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Y - \{y\})$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{=} \frac{1}{Card(Y)} > 0$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{=} UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Z),$$

concluimos que *Y* ***AVBU_P*** *Z*. Podemos probar que ***Pes*** implica ***AVBU*** con el mismo argumento, pero usando la función de utilidad $V = -U$.

d) Sean Y y Z dos subconjuntos de X tal que Y **(*Opt y Pes*)$_P$** ***Z.*** Entonces, $Max_P\ Y\ P\ Max_P\ Z$ (por tanto, Y ***LexiMax$_P$*** Z) y $Min_P\ Y\ P\ Min_P\ Z$ (por tanto, Y ***LexiMin$_P$*** Z). Así pues, Y ***LMM$_P$*** Z se mantiene. Por tanto, **(*Opt y Pes*)** implica ***LMM.***

e) Sean $Y = \{y_1, y_2,\ldots, y_m\}$, $Z = \{z_1, z_2,\ldots, z_h\}$ subconjuntos no vacíos de X tal que Y ***LMM$_P$*** Z, donde P es el orden lineal $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$, $y_1Py_2P\ldots Py_m$ y $z_1Pz_2P\ldots Pz_h$. Consideremos tres posibilidades. Para el primer caso (Y ***Opt$_P$*** Z), y también para el segundo (Y ***Pes$_P$*** Z), hemos probado que Y ***AVBU$_P$*** Z. Entonces, supongamos que ni Y ***Opt$_P$*** Z ni Y ***Pes$_P$*** Z se mantienen, dado que $y_m = z_h$ e $y_1 = z_1, y_2 = z_2,\ldots\ y_{k-1} = z_{k-1}, y_kPz_k$, con $1 < k < m$, $1 < k \leq h$. Consideremos los siguientes dos subcasos.

- Supongamos que $card(Y) = m \leq h = card(Z)$. Dado un número positivo suficientemente pequeño ε, sea U cualquier función de utilidad consistente con P satisfaciendo $1\text{-}\varepsilon < U(x_j) < 1+\varepsilon$, $\forall x_j$ tal que x_jPz_k y $\text{-}\varepsilon < U(x_j) < \varepsilon$, $\forall x_j$ tal que y_kPx_j. Dado que

$$\begin{aligned} UE(\boldsymbol{q}_U, Y) &= \frac{k}{m} UE(\boldsymbol{q}_U,\{y_1,\ldots,y_k\}) + \frac{(m\text{-}k)}{m} UE(\boldsymbol{q}_U,\{y_{k+1},\ldots,y_m\}) \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{k}{m} \\ &> \frac{k-1}{h} \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{k-1}{h} UE(\boldsymbol{q}_U,\{z_1,\ldots,z_{k-1}\}) + \frac{(h\text{-}k+1)}{h} UE(\boldsymbol{q}_U,\{z_k,\ldots,z_h\}) \\ &= UE(\boldsymbol{q}_U, Z), \end{aligned}$$

  tenemos Y ***AVBU$_P$*** Z.

- Supongamos que $card(Y) = m > h = card(Z)$. Sea U cualquier función de utilidad consistente con P y satisfaciendo $U(y_m) = 0$ y $1\ \text{-}\varepsilon < U(x_j) < 1+\varepsilon$, $\forall x_j$ tal que x_jPy_m, para un número positivo suficientemente pequeño ε. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} UE(\boldsymbol{q}_U, Y) &= \frac{1}{m} U(y_m) + \frac{m\text{-}1}{m} UE(\boldsymbol{q}_U,\{y_1,\ldots,y_{m\text{-}1}\}) \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{m\text{-}1}{m} \end{aligned}$$

$$> \frac{h-1}{h}$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{h}U(z_h) + \frac{h\text{-}1}{h}UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, \{z_1,\ldots,z_{h\text{-}1}\})$$

$$= UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Z),$$

así Y ***AVBU$_P$*** Z.

f) Sea P $x_1 > x_2 > \ldots > x_5$. Para probar que **(*Opt* y *Pes*)** no implica ***TVBU***, sea $Y = \{x_1, x_3, x_4\}$ y $Z = \{x_2, x_5\}$. Es obvio que Y ***(Opt y Pes)$_P$*** Z. Sin embargo, dada la función de utilidad consistente con P: $U(x_1) = 15$, $U(x_2) = 14$, $U(x_3) = 2$, $U(x_4) = 1$ y $U(x_5) = 0$, podemos ver que $UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Y) = 6 < UE(\boldsymbol{q}_{\mathrm{U}}, Z) = 7$, por tanto Y ***AVBU$_P$*** Z no se satisface.
Para probar que ***DD*** no implica ni ***Opt*** ni ***Pes***, supongamos primero que $Y = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ y $Z = \{x_1\}$, entonces vemos que Y ***DD$_P$*** Z se mantiene pero Y ***Opt$_P$*** Z no, y supongamos en segundo lugar que $Y = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ y $Z = \{x_5\}$, entonces vemos que Y ***DD$_P$*** Z se mantiene pero Y ***Pes$_P$*** Z no. □

Antes de concluir esta sección es importante señalar que, cualquiera de los dos grupos básicos de órdenes presentados en la Sección 2.5.1, así como sus correspondientes definiciones, se han clasificado en orden creciente de "fuerza" (decreciente en exigencia), entendiendo por tal, que ordenan un mayor número de subconjuntos de alternativas, aunque dichas ordenaciones pueden resultar menos intuitivos o naturales desde el punto de vista de los individuos. Así, por ejemplo, si decimos que el orden ***DF*** es más débil (y, al mismo tiempo, más exigente) que ***DD*** significa que, dados dos conjuntos de alternativas Y y Z, si Y ***DF$_P$*** Z entonces Y ***DD$_P$*** Z.

Dicho de otro modo, los conjuntos ordenados por ***DF***, son un subconjunto de los ordenados por ***DD***, $DF \subset DD$. Esa misma ordenación se pone de manifiesto en las implicaciones establecidas en la Figura 2.7.

2.6. Algunos Resultados de Manipulación en el contexto de las Correspondencias de Votación.

Esta sección presenta algunos resultados que, para el ámbito general de las correspondencias de votación, ya existen en relación a la problemática de la manipulación y, en concreto, aquellos que tienen que ver con la extensión del Teorema de Imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite y que presentan cierta analogía con los resultados que, en ese mismo contexto, se obtienen en el Capítulo 3 para la extensión del Teorema de Moulin.

Antes de nada, hay que señalar que cualquier resultado de manipulación en el contexto de las correspondencias de votación estará determinado en función de la definición específica de manipulabilidad que se establezca.

Dependerán pues los diferentes resultados obtenidos, de los diferentes supuestos (explícitos o implícitos) acerca de cómo los votantes extienden las preferencias sobre candidatos individuales a conjuntos de candidatos, y de si dicha extensión se basa, como vimos en la sección anterior, en relaciones de dominación o, por el contrario, está definida en función de cierta medida de utilidad esperada.

Señalemos brevemente que el estudio de la manipulación de la elección social se inició para correspondencias con la contribución seminal de Patanaik (1973), seguido por Gardenfors (1976), Kelly (1977), Barberà (1977a, b), y Feldman (1979b). Todas estas obras presentan definiciones débiles de la no manipulabilidad pero sus resultados se ven oscurecidos por la necesidad de acudir a un número de condiciones adicionales. Estas condiciones van desde las distintas consideraciones sobre la racionalidad de los votantes (Patanaik, 1973; Barberà 1977b; Feldman, 1979b; y Kelly, 1977), a la consistencia con el principio de Condorcet (Gardenfors, 1976) o una versión fuerte de Monotonía (Barberà, 1977a).

Ya más recientemente, una de generalización del Teorema de Gibbard-Satterthwaite a correspondencias ha sido establecida en Duggan y Schwartz (2000). En este artículo se define una correspondencia de votación como manipulable, si existe un individuo, un perfil de preferencias verdadero y una ordenación falsa de las alternativas, tal que: Para toda lotería sobre el conjunto de resultados obtenido mintiendo, y para toda lotería sobre el conjunto de resultados obtenido cuando se dice la verdad, existe una función de utilidad esperada consistente con la verdadera ordenación del votante sobre las alternativas individuales, para la que la utilidad esperada de la primera lotería es mayor que la de la segunda. Señalemos que en la prueba de su resultado, establecen que esta definición de manipulación es equivalente a la que se obtendría suponiendo que las preferencias de los individuos entre conjuntos de alternativas se establecen siguiendo los órdenes *Opt* y *Pes* de la Sección 2.5.1.

Bajo este concepto de manipulación, llegan a un resultado igual de negativo que el de Gibbard-Satterthwaite al demostrar que sólo las correspondencias de elección social dictatoriales cumplen simultáneamente que no son manipulables y que satisfacen dos condiciones: la Soberanía del Ciudadano y la Resolutividad Residual. La Soberanía del Ciudadano, como ya sabemos, requiere que cada alternativa sea elegida para algún perfil de preferencias. La Resolutividad Residual obliga a que la elección sea una única alternativa cuando las preferencias de los individuos son "similares", es decir, cuando todos los votantes menos uno tienen idénticas preferencias, y las preferencias de ese otro votante sólo se diferencian de las de los demás en el orden del par de alternativas que se clasifican en los primeros puestos.

Por su parte, Barberá et al. (2001) hacen un análisis similar y concluyen que, supuesto que las preferencias de los individuos sobre conjuntos de alternativas son consistentes con la maximización de la utilidad esperada Bayesiana que, en concreto, se corresponden con los órdenes *AVB* y *AVBU* expuestos en la Sección 2.5.1, sólo las correspondencias de elección social dictatoriales satisfacen unanimidad y son no manipulables en el dominio *AVB* y, por otra parte, un resultado bi-dictatorial se mantiene en el dominio *AVBU*.

Ching y Zhou (2002) demuestran, para una definición de manipulabilidad similar a la de Duggan y Schwartz (2001), que sólo las funciones dictatoriales o constantes son no manipulables, mientras que Benoit (2002) usa un esquema en cierto modo similar. Sin embargo, él no asume que las preferencias sobre conjuntos sean consistentes con una maximización de la utilidad en algún modo. Su supuesto principal sobre el dominio de las preferencias es que sólo unos órdenes especiales de preferencias llamados “top” o “bottom”, son admisibles. Sin entrar en detalle, una preferencia "top" es una en la que los conjuntos se evalúan sobre la base de sus elementos máximos, mientras que las "bottom" son las que tienen como elementos críticos los peores. Además, usa algunos supuestos más débiles en relación a todos los órdenes admisibles y un supuesto menos inocuo de "casi unanimidad". Esta propiedad establece que si todos menos uno de los individuos tienen un elemento único máximo común, entonces ese único elemento debe ser el valor de la elección social en ese perfil. Su resultado principal es que si existen al menos tres individuos y tres alternativas, cualquier correspondencia de elección social no manipulables que satisface casi unanimidad, debe ser dictatorial.

Así mismo, en Campbell y Kelly (2000a, 2002) se demuestra que bajo un orden de preferencias Leximin, y para correspondencias de elección que seleccionan a un conjunto no unitario de candidatos (acotado superior e inferiormente), una correspondencia de votación no manipulable es oligárquica[3].

2.7. Comentarios y Cuestiones Adicionales.

En este capítulo, centrado ya en contexto de los métodos de votación y, más en concreto, de dos de sus familias más importantes: los Métodos Posicionales y los Métodos Condorcet, además de definir algunos de sus componentes más relevantes, se han presentado brevemente las propiedades de Monotonía y Participación. Dos propiedades que han demostrado ser, tanto por su propia definición como por los resultados teóricos que, en referencia a ellas, afectan a los distintos métodos de votación, importantes en cualquier análisis sobre los mismos.

Además, y ya en relación a la propiedad de Participación y a su posible incumplimiento (Paradoja de la Abstención), los resultados en funciones de votación son claros y rotundos, como pone de manifiesto el Teorema 2.1 (Moulin, 1988a), al establecer que todas las

[3] Para un estudio más amplio de la cuestión de la manipulación en la Elección Social véase Taylor (2005).

correspondencias de votación Condorcet incumplen esta propiedad y, por tanto, están afectadas por esta paradoja.

Puesto que la Paradoja de la Abstención hace referencia a la existencia de situaciones en las que un votante o grupo de votantes pueden obtener un mejor resultado en la elección decidiendo quedarse en casa en lugar de votar según sus verdaderas preferencias, esta paradoja puede verse también como un caso particular de manipulación mediante la abstención.

Por otro lado, y en relación a la manipulación en general, el resultado de Gibbard-Satterthwaite establece que todas las funciones de votación son manipulables y que, por lo tanto, un votante, mintiendo en sus preferencias, puede conseguir que el resultado de la elección sea un candidato más preferido que aquel que resultaría ganador si hubiese revelado sus verdaderas preferencias.

Entonces, tanto si la manipulación de lleva a cabo mediante un cambio en el perfil de preferencias de los votantes (que deciden mentir y votar estratégicamente), como es el caso más general, como si tiene lugar mediante la abstención (los votantes deciden no votar), extender los resultados de Gibbard-Satterthwaite y de Moulin al ámbito más general de correspondencias de votación presenta una primera analogía: la necesidad de extender las preferencias individuales sobre alternativas a conjuntos de alternativas pues, ahora, los resultados de la elección ya no son singulares sino que son subconjuntos de alternativas.

El problema de la extensión de los órdenes es el tema central de la Sección 2.5 donde *se presenta, además de la definición de los principales órdenes entre conjuntos, las relaciones e implicaciones fundamentales que existen entre ellos, y que aparecen recogidas en la* Proposición 2.2*, y esquematizadas de forma global en la* Figura 2.7. Este análisis es relevante puesto que constituye una herramienta fundamental, no sólo para entender los principales resultados que, en relación a la manipulación y al problema de extensión del Teorema de Gibbard-Satterthwaite, se han obtenido en el contexto de las correspondencias de votación, como se muestra en la Sección 2.6 sino porque, es precisamente un análisis similar, pero referido a la problemática de la Participación y a la posibilidad de extender el Teorema de

Moulin a ese mismo contexto de las correspondencias de votación, lo que constituye el grueso de la investigación contenida en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3. PARTICIPACIÓN EN CORRESPONDENCIAS DE VOTACIÓN

3.1. Introducción.

Como se ha señalado en el Capítulo 1, en el desarrollo de la moderna Teoría de la Elección Social la aparición del Teorema de Imposibilidad de Arrow en 1951 supuso, entre otras cosas, poner de manifiesto que no existe ningún método de votación perfecto, al menos, desde la perspectiva de contener un conjunto mínimo de propiedades fundamentales que, desde una perspectiva general, se suponen indispensables para considerarlo como mínimamente razonable.

A pesar de este resultado adverso, parece claro que cualquier aproximación normativa o positiva a los distintos métodos o familias de métodos de votación que trate de caracterizarlos debe incluir algunas propiedades deseables y, en este sentido, aquellas relacionadas con la racionalidad individual aparecen entre las más solicitadas.

La explicación es clara, sea cual sea el propósito al que se pretenda aplicar, en la utilización de un sistema de votación como herramienta para la obtención de una determinada decisión social, y dado que su resultado vendrá determinado a partir de las preferencias expresadas en su voto por los distintos individuos involucrados, si pretendemos salvaguardar unos mínimos criterios democráticos, lo más intuitivo es exigir que dicho sistema de elección cumpla con el respeto a dichas preferencias expresadas, es decir, que exista una relación directa y coherente entre los resultados obtenidos en dicha elección y los deseos expresados por los votantes.

Dicho de otro modo, los deseos individuales de los distintos votantes representados a través de sus preferencias deberían ser agregados de modo que el resultado no responda de un modo negativo a dichas preferencias. En este sentido, propiedades de tipo Monotonía y Participación vienen a plasmar estas consideraciones de racionalidad individual en la Teoría de las Votaciones.

Es el análisis más profundo de esta última propiedad y, más aún, de su posible incumplimiento (Paradoja de la Abstención) lo que constituye el eje central de este capítulo, en la búsqueda de una extensión de de los resultados de imposibilidad que, en relación a ella y a las correspondencias de votación Condorcet, se han enunciado.

Como ya sabemos, la Paradoja No-Show, también llamada la Paradoja de la Abstención, implica la existencia de situaciones donde encontramos votantes desilusionados con las consecuencias de emitir una papeleta de voto con sus verdaderas preferencias sobre los candidatos dado que, si deciden no votar, pueden asegurarse un resultado más preferido al que obtendrían si emitieran su voto en base a sus verdaderas preferencias.

El hecho de que esta paradoja esté presente en algún método de votación es, por tanto, algo no deseable pues va contra uno de las intuiciones más profundas acerca del significado de votar, que el acto de votar no dañe al votante ni a su candidato favorito.

Aunque los primeros ejemplos de la Paradoja de la Abstención (Fishburn y Brams, 1983), afectan a métodos no Condorcet, algunas formas de la paradoja afectan a todos los métodos de votación pertenecientes a esta familia, y algunas formas más fuertes a casi todos. Como consecuencias, este fallo de los métodos Condorcet es relevante en la batalla largamente establecida, y todavía duradera, entre Borda y Condorcet, porque los métodos Posicionales, y en particular el método de Borda, están libres de estas paradojas.

Dado que, como sabemos, el primer y más importante resultado de imposibilidad, en Moulin (1988a), establece que las funciones de votación Condorcet (reglas de Condorcet que tienen un único ganador para cada situación) fallan en satisfacer la propiedad de Participación y, por tanto, están sometidas a la Paradoja de la Abstención, un camino obvio de desarrollo en la investigación posterior es buscar una extensión del resultado de Moulin para el caso general de las correspondencias de votación Condorcet.

Es justamente el análisis en profundidad de la problemática de la Participación en el ámbito general de las correspondencias de votación en la búsqueda de una extensión del Teorema de Moulin a correspondencias de votación Condorcet lo que constituye el eje central de este capítulo.

La Sección 3.2 presenta la revisión de los principales resultados de posibilidad e imposibilidad ya conocidos de Participación en el contexto de las funciones de votación. En la Sección 3.3 se analiza en profundidad la problemática de la Participación en el esquema general de las correspondencias de votación. En primer lugar, definiendo las distintas propiedades de Participación en este nuevo contexto y las principales relaciones de implicación entre ellas para, a continuación, analizar el problema concreto de la extensión del teorema de Moulin a correspondencias de votación Condorcet y presentar los nuevos resultados obtenidos. Para finalizar la Sección 3.4 presenta las conclusiones y comentarios adicionales.

3.2. Participación y Funciones de Votación.

En el Capítulo 2, en el contexto de las funciones de votación, quedó establecido en su definición que el cumplimiento de la Propiedad de Participación, definida inicialmente en Moulin (1988a), trata de reflejar formalmente la idea de que un método de votación debería siempre incentivar el voto, de modo que no debería ocurrir nunca que un votante pudiese resultar perjudicado al realizar su voto sincero, en el sentido de que como resultado de la votación apareciese ganador un candidato menos preferido, de acuerdo a sus preferencias, a aquel que resultaría ganador si hubiese decidido abstenerse porque, si eso fuera así, está claro que el votante hubiese hecho mejor no votando.

Pues bien, en relación a esta propiedad de Participación, ya el propio Moulin (1988a) obtuvo algunos resultados interesantes en este mismo marco de las funciones de votación al establecer que todos los métodos Posicionales (cuando los empates se rompen de acuerdo con un orden fijo de los candidatos) satisfacían Participación[4], lo cual, en principio, suponía un punto a favor para esta familia concreta de métodos.

En este mismo sentido, y para los métodos posicionales con descartes, en Fishburn y Brams (1983) se muestra que los métodos de Pluralidad con Descarte y el método de Voto Simple Transferible son inconsistentes con algunas propiedades de Participación, resultado posteriormente ampliado en Lepelley y Merlín (2001), para n = 3 y un ganador único (obtenido mediante desempate si fuera necesario), para toda esta familia de métodos.

Por su parte, y en relación a la familia de los métodos Condorcet, ya se ha indicado también en el Capítulo 2 que en Moulin (1988a), para $n > 3$, se presenta un resultado importante de imposibilidad al establecer que todas las funciones de elección social consistentes con el principio de Condorcet incumplían esa misma propiedad de Participación y, por tanto, estaban sometidas a la Paradoja de la Abstención.

Así pues, al menos en lo referente a la familia de métodos Condorcet, el requerimiento de Participación, en el contexto de funciones de elección social o, lo que es lo mismo, mediante métodos de votación resolutivos, no arroja unos resultados muy alentadores y, por lo tanto, este resultado negativo supone, desde el punto de vista axiomático, una ventaja de los métodos Posicionales frente a los métodos Condorcet.

3.3. Participación y Correspondencias de Votación.

La propiedad de Participación es relevante en cualquier aproximación axiomática al análisis de los distintos métodos de votación y el estudio de su cumplimiento por parte de un determinado procedimiento de votación consiste en comenzar con un procedimiento de

[4] En realidad este resultado surge de modo natural a partir de Smith (1973), en donde se caracterizan los métodos posicionales a partir de una propiedad denominada Separabilidad, relacionada con la propiedad de Participación aquí definida.

agregación de preferencias dado e intentar investigar si la decisión de votar de los individuos en dicho procedimiento responde o no de un modo positivo en relación a sus propias preferencias. Es decir, ver cuándo la decisión de votar se traduce en la obtención de un resultado mejor frente a la decisión de no votar.

Evidentemente, a la luz de un votante de referencia, la comparación entre los resultados de la elección antes y después de tomar la decisión de votar implica, de un modo implícito, el establecimiento de un orden de preferencias, con el fin de poder distinguir si un resultado es mejor o peor que el otro, para así decidir entre votar sinceramente o abstenerse.

Cuando consideramos métodos de votación resolutivos (funciones de elección social), determinar si el candidato ganador es mejor cuando un votante vota o se abstiene está recogido y coincide con la propia ordenación de preferencias sobre el conjunto de los candidatos que tiene dicho votante.

Sin embargo, cuando nos situamos en el contexto más general de los métodos de votación no resolutivos (correspondencias de votación), donde los resultados de la votación son no unitarios, establecer la preferencia entre conjuntos de candidatos ganadores requiere, cuando no se dispone de un orden explícito sobre subconjuntos de candidatos, de una extensión, al menos parcial, de esa ordenación individual a subconjuntos de candidatos.

En este sentido, para abordar el problema de la participación en las correspondencias de elección social, el primer paso es comenzar por la definición y descripción de las distintas propiedades de Participación en el contexto de correspondencias de votación.

3.3.1. Propiedades de Participación.

Las propiedades de Participación definidas en esta sección constituyen los primeros intentos de extender de un modo natural el concepto original de Participación de Moulin al contexto general de correspondencias de votación y, en este sentido, se han obtenido directamente, sin hacer uso de ningún orden específico de extensión de las preferencias individuales. A continuación, además de sus definiciones originales, se acompaña cada una de ellas de sus principales fortalecimientos y debilitamientos.

Participación Positiva

Definición 3.1 (Participación Positiva)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Positiva*** (*PPos*) si para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$, donde el perfil v contiene un conjunto de votantes unánime, tenemos que si $x \in f(X, p)$ y $x >_v y$, $\forall y \in X$, entonces $x \in f(X, p+v)$.

Es decir, si x es elegido en el perfil p y aparecen nuevos votantes con preferencias idénticas que tienen al candidato x como favorito, x seguirá siendo elegido.

Señalar que el Ejemplo 2.3 del capítulo anterior y, concretamente, para los métodos de Black, Kemeny y Dogson considerados como correspondencias de votación, es precisamente un ejemplo de incumplimiento de esta propiedad de Participación Positiva (y, evidentemente, también de cualquiera de los fortalecimientos que a partir de ella se definan). Allí, en la situación inicial resultaba ganador el candidato favorito de los nuevos votantes, x_2, que, sin embargo, dejaba de ser elegido cuando dichos votantes decidían votar de acuerdo a sus preferencias.

La propiedad de Participación Positiva así definida no impone ninguna exigencia más allá de que el candidato favorito para los nuevos votantes continúe perteneciendo al conjunto de ganadores en el perfil ampliado. Esta propiedad puede fortalecerse incluyendo restricciones adicionales sobre el resto de candidatos que formarán parte del conjunto final de ganadores, como se pone de manifiesto en las siguientes definiciones.

Definición 3.2 (Participación Positiva Semiestricta)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Positiva Semiestricta*** (*PPosS*em) si para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$, donde el perfil

v contiene un conjunto de votantes unánime, tenemos que si $x \in f(X, p)$ y $x >_v y$, $\forall y \in X$, entonces $x \in f(X, p + v)$ y $f(X, p + v) \subseteq f(X, p)$.

Si x es elegido en el perfil p y aparecen nuevos votantes con preferencias idénticas que tienen al candidato x como favorito, en el perfil $p + v$ x seguirá siendo elegido y además no le acompañará como elegido ningún candidato no elegido en p.

Ahora, a diferencia de la Participación Positiva, ya no es suficiente con que el candidato favorito de los nuevos votantes esté entre los ganadores si éstos deciden votar, sino que además, pueden estar seguros de que no se convertirán en ganadores candidatos que no fueran ya ganadores en la situación inicial.

Definición 3.3 (Participación Positiva Cuasiestricta)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Positiva Cuasiestricta*** (*PPosCua*) si para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$, donde el perfil v contiene un conjunto de votantes unánime, tenemos que si $x \in f(X, p)$ y $x >_v y$, $\forall y \in X$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

a) $x \in f(X, p + v)$ y $f(X, p + v) \subseteq f(X, p)$.
b) Si $z \in f(X, p+v)$, entonces para todo $y \in f(X, p)$ tal que $y >_v z$, se cumple $y \in f(X, p+v)$

Si el favorito de los nuevos votantes había sido elegido en p, seguirá siéndolo, y sólo podrán ser elegidos ahora candidatos ya elegido en p. Y además, un candidato z sólo será elegido ahora si todos los preferidos a z y elegidos en p también lo son.

De nuevo, ahora restringimos aún más el conjunto de ganadores de la situación ampliada con los nuevos votantes, porque no es suficiente con que en el nuevo resultado no aparezcan entre los ganadores aquellos candidatos que no lo fueron a su vez en la situación inicial, sino que, además, si en el conjunto final de ganadores se mantiene un candidato como ganador, también se mantendrán como ganadores todos aquellos candidatos que sean preferidos a él por los nuevos votantes y que ya eran elegidos como ganadores anteriormente.

Definición 3.4 (Participación Positiva Estricta)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Positiva Estricta*** (*PPosEs*) si para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$, donde el perfil v contiene un conjunto de votantes unánime, tenemos que si $x \in f(X, p)$ y $x >_v y$, $\forall y \in X$, entonces $f(X, p+v) = \{x\}$.

Si x es elegido en el perfil p y aparecen nuevos votantes preferencias idénticas que tienen al candidato x como favorito, en el perfil $p + \{v\}$ x seguirá siendo elegido y además será el único elegido.

Está claro que esta propiedad de Participación Positiva Estricta es la más exigente de todas las propiedades de participación positiva definidas hasta ahora pues, cuando se añaden nuevos votantes con un mismo candidato favorito, no es suficiente con que ese candidato continúe siendo ganador en la nueva situación sino que, además, éste ha de ser el único ganador.

Resulta tan fuerte que puede interpretarse como una propiedad de participación positiva cuasi-dictatorial por cuanto que, su cumplimiento, en aquellos métodos de votación en los que existen muchos ganadores, da al nuevo votante un poder casi dictatorial en la elección del ganador, seleccionando como tal a su favorito, cuado éste se encontraba ya en el conjunto de ganadores.

Participación Negativa

Definición 3.5 (Participación Negativa)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Negativa*** (*PNeg*) si para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$, donde el perfil v contiene un conjunto de votantes con preferencias unánime, si $x \notin f(X, p)$ y $y >_v x$, $\forall y \in X$, entonces $x \notin f(X, p + v)$.

Si x es no elegido en el perfil p y aparecen nuevos votantes idénticos v que tienen al candidato x como el menos preferido (o antifavorito, ya que está situado en último lugar en sus preferencias individuales), x seguirá sin ser elegido.

La Propiedad de Participación Negativa presenta una relación de simetría con la Participación Positiva, pues si ésta exigía que el candidato preferido de los nuevos votantes continuara como ganador en la nueva situación cuando decidían votar, la Participación Negativa, por su parte, impide la posibilidad de que el candidato menos preferido por los nuevos votantes sea elegido, si no lo era ya en la situación inicial.

De nuevo, si volvemos al Ejemplo 2.3 del capítulo anterior, para el caso concreto del método de Pluralidad con Descartes, es precisamente esta propiedad de Participación Negativa la que se incumple pues, en la situación inicial era ganador el candidato favorito de los nuevos votantes, x_2, que, sin embargo, dejaba de serlo cuando dichos votantes decidían votar de acuerdo a sus preferencias, resultando elegido entonces, precisamente, su candidato menos favorito x_4.

Un breve apunte en relación a las propiedades de Participación definidas hasta este momento. Si nos fijamos atentamente, todas ellas tienen una doble vertiente, aquella que se refiere a las preferencias del votante y de si su acto de votar le es “rentable”, y aquella que hace hincapié en el punto de vista del candidato, pues se fijan casi exclusivamente en el candidato situado como favorito (o antifavorito para el caso de Participación Negativa) dentro del perfil de preferencias de un votante.

De hecho, todas ellas establecen que dicho candidato favorito continúe como ganador en la nueva situación, sin importar que en el resultado final vaya, en ocasiones, acompañado de otros candidatos menos preferidos para el votante. Por lo tanto, en cierto sentido, no está siempre claro que el votante salga beneficiado realmente al realizar su voto.

Sin embargo, el incumplimiento de cualquiera de ellas y, por tanto, la aparición de la correspondiente Paradoja de la Abstención a la que dichos incumplimientos da lugar, puede verse, en este caso, como una falta de monotonía en relación al candidato favorito a favor del cual los nuevos votantes habrían votado en el caso de no abstenerse. Así, si existe entre el conjunto de ganadores, un candidato ganador x que, aunque sea supuestamente favorecido con respecto a otro u otros ganadores mediante una papeleta adicional en la que x se ordena como favorito, puede en realidad ser dañado por este voto adicional porque, como consecuencia de su acción, x se convierte en perdedor mientras que alguno o todos los otros candidatos se convierten o permanecen como ganadores.

Por su parte, la propiedades de Participación Optimista y Pesimista que se definen a continuación aparecen recogidas en Jimeno (2003) y además de ser, como las anteriores, una adaptación de la propiedad de Participación al esquema más general de las correspondencias de votación, ponen de manifiesto el hecho de que la definición de este tipo de propiedades puede estar determinada también por el carácter específico de los votantes que se añaden a una situación inicial.

Participación Optimista

Definición 3.6 (Participación Optimista)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Optimista*** (*POpt*) si, para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p + v)$ donde v contiene un conjunto de votantes es unánime, si $x \in f(X, p)$, entonces se cumple la siguiente condición:

$$\mathrm{Sup}_v f(X, p+v) \geq_v \mathrm{Sup}_v f(X, p))$$

Es decir, el candidato superior en los nuevos votantes cuando votan, es al menos tan preferido como el candidato superior de esos mismos votantes cuando se abstienen

Dicho de otro modo, Si x es elegido en el perfil p y aparecen nuevos votantes idénticos, en $p + v$ será elegido o bien x o bien algún candidato más preferido que x.

Dada esta definición podremos asegurar que, si esta propiedad se cumple, ningún votante optimista, que realiza su elección fijándose exclusivamente en sus favoritos de entre los ganadores en ambas situaciones (votando y absteniéndose), decidiría no votar porque, en el conjunto de candidatos ganadores siempre se encontrará, si vota, un candidato al menos tan preferido como su ganador favorito si decidiera abstenerse.

Tratando de clarificar aún más los casos más significativos de cumplimiento e incumplimiento de las definiciones de Participación que aparecen a continuación, en lo que sigue alguna de ellas irá acompañada de una Figura explicativa, todas con la siguiente estructura:

a) La primera línea vertical, (v), muestra los candidatos ganadores en la situación (X, p), que representa la decisión de abstenerse de un conjunto de votantes con perfil de preferencias unánime v.
b) La segunda línea y siguiente/s, ($v(\cdot)$),muestran los candidatos ganadores en la situación (X, p+v) que representa la decisión de votar de dicho conjunto votantes.
c) Los puntos gruesos (●) muestran candidatos ganadores unitarios y los segmentos continuos y finos muestran subconjuntos de ganadores.
d) La situación de los candidatos en todas las líneas verticales refleja las preferencias de v.

Definición 3.7 (Participación Optimista Semiestricta)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Optimista SemiEstricta*** (*POptSem*) si, para cualquier par de situaciones (X, p) y (X, p+v) donde v es unánime, se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\text{Sup}_v f(X, p+v) \geq \text{Sup}_v f(X, p)$
b) Si $\text{Sup}_v f(X, p) >_v z$ y $z \notin f(X, p)$, entonces $z \notin f(X, p+v)$

Si x es el más preferido por v de entre los elegidos en el perfil p, en $p + v$ han de ser elegidos o bien algún candidato más preferido que x o bien x, y sólo podrá ser elegido algún candidato menos preferido que x si ya fue elegido en p.

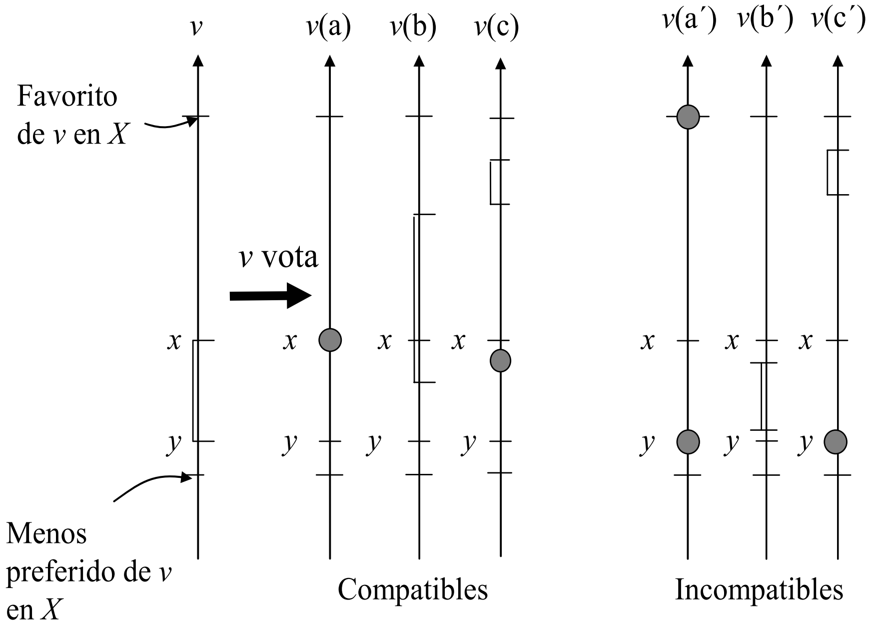


Figura 3.1 Situaciones Compatibles y No compatibles con la propiedad de Participación Optimista Semiestricta

Como se puede observar en esta Figura 3.1, esta propiedad es más exigente que la propiedad de Participación Optimista porque, ya no es suficiente con que el candidato más preferido por los nuevos votantes cuando se abstienen, *x*, sea al menos tan preferido como el más preferido cuando deciden votar. Ahora, además, en el conjunto de ganadores en ($p + v$), no puede haber ningún candidato que sea menos preferido que *x*, si no ha sido ya elegido anteriormente.

De hecho, en la propia Figura 3.1, si partiendo de *v* (que, recordemos, representa el perfil de preferencias *v* de los nuevos votantes, y sobre él se indica el conjunto de ganadores cuando dichos votantes se abstienen) nos fijamos en las columnas *v*(a´) y *v*(c´) (que representan sobre el perfil de preferencias *v* el conjunto de ganadores de la situación (X, $p + v$) donde los nuevos votantes han votado), vemos que esos resultados son compatibles con Participación Optimista (existe un candidato ganador en ($p + v$) que es preferido a *x*) pero no con Participación Optimista Semiestricta (existe algún ganador en ($p + v$) que es menos preferido que *x*, y que no había sido elegido en *p*).

Definición 3.8 (Participación Optimista Cuasiestricta)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Optimista Cuasi-Estricta*** (*POptCua*) si, para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$ donde v es unánime, siendo, se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\mathrm{Sup}_v\, f(X, p+v) \geq_v \mathrm{Sup}_v\, f(X, p)$

b) Si $\mathrm{Sup}_v\, f(X, p) >_{\mathrm{v}} z$ y $z \notin f(X, p)$, entonces $z \notin f(X, p+v)$

c) Si $z \in f(X, p) \cap f(X, p+v)$, entonces para todo y tal que $y >_{\mathrm{v}} z$ se cumple que $y \in f(X, p)$ implica $y \in f(X, p+v)$.

Si x es el más preferido por v de entre los elegidos en el perfil p, en $p + v$ han de ser elegidos o bien algún candidato más preferido que x o bien x, y sólo podrá ser elegido algún candidato menos preferido que x si ya fue elegido en p. Y además, un candidato z menos preferido que x sólo será elegido si todos los preferidos a z y elegidos en p también fueran elegidos en $p+v$.

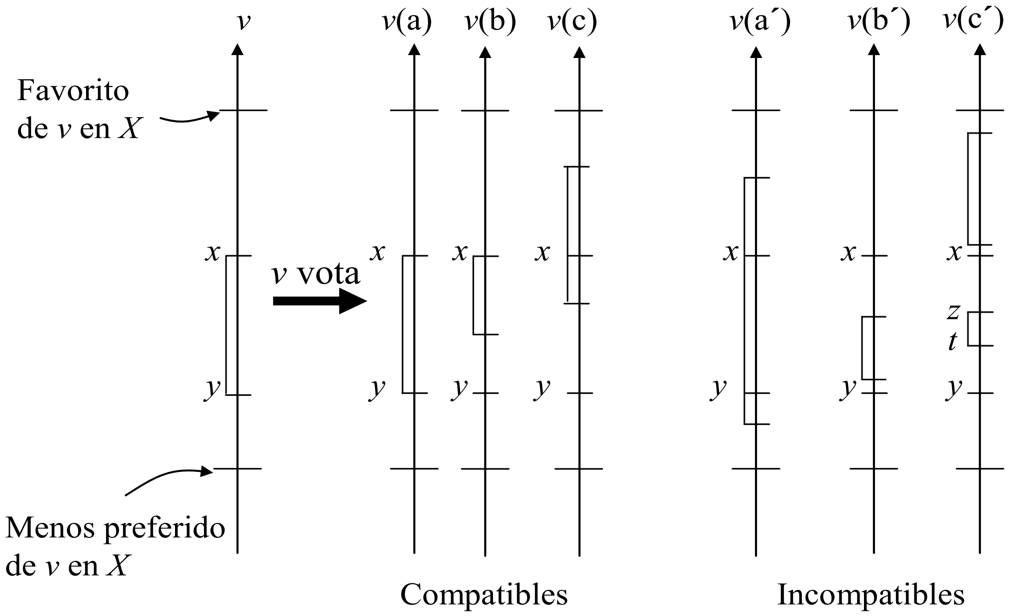


Figura 3.2 Situaciones compatibles e incompatibles con la propiedad de Participación Optimista Cuasiestricta

De nuevo, esta propiedad de Participación Optimista Cuasiestricta es más exigente que la Participación Optimista Semiestricta. Si miramos a la Figura 3.2, las situaciones compatibles especificadas son válidas para ambas propiedades pero, si nos fijamos en las situaciones incompatibles como, por ejemplo, la representada en *v*(c´), vemos que esa situación es compatible con la propiedad de Participación Optimista Semiestricta (no son elegidos como ganadores candidatos menos preferidos que *x* que no hubieran sido elegidos ya en *v*) pero no con Participación Optimista Cuasiestricta. De hecho, entre los candidatos ganadores de esa nueva situación, hay candidatos menos preferidos que *x* que también eran elegidos en la situación inicial (segmento entre *z* y *t*) pero no están acompañados, como debería ser, por todos los que son preferidos a ellos y eran también elegidos anteriormente (segmento vacío entre *z* y *x*).

Definición 3.9 (Participación Optimista Estricta)

Una correspondencia de votación *f* cumple la ***propiedad de Participación Optimista Estricta*** (*POptEs*) si, para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$ donde *v* es unánime, se cumple la siguiente condición:

$$\mathrm{Inf}_v\, f(X, p+v) \geq_v \mathrm{Sup}_v\, f(X, p))$$

Es decir, en candidato ganador menos preferido para los nuevos votantes si deciden votar, será siempre al menos tan preferido como el candidato ganador favorito si esos mismos votantes deciden abstenerse.

Dicho de otro modo, si *x* es elegido en el perfil *p* y aparece un conjunto de votantes con perfil *v* (del que *x* no es necesariamente favorito), en el perfil $p + v$ no será elegido ningún candidato menos preferido que *x* (por tanto, sólo serán elegidos candidatos que *v* prefiere tanto o más que a *x*).

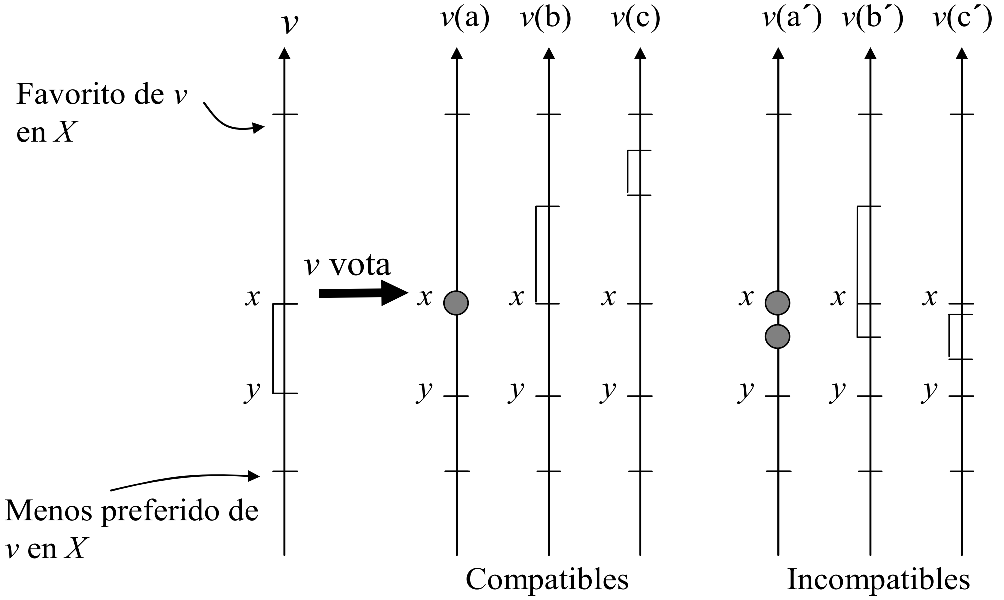


Figura 3.3 Situaciones compatibles e incompatibles con la propiedad de Participación Optimista Estricta

Como se observa en la Figura 3.3, la propiedad de Participación Optimista Estricta es la más exigente de todas las propiedades de Participación Optimista definidas. Ahora, en el nuevo conjunto de candidatos ganadores cuando los votantes con perfil unánime v deciden votar, no puede aparecer como ganador ningún candidato que no sea, al menos, tan preferido, de acuerdo con sus preferencias, como el más preferido para ellos en el caso de que hubieran decidido abstenerse, x.

Relacionada con la propiedad de Participación Optimista, en Jimeno (2003) también se define la propiedad de Participación Pesimista.

Participación Pesimista

Definición 3.10 (Participación Pesimista)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Pesimista*** (*PPes*) si, para cualquier par de situaciones (X, p) y (X, v) donde v es unánime, no existe $y \in f(X, p+v)$ tal que para todo $x \in f(X, p)$ se cumpla $x >_v y$.

Es decir, cuando se agrega un conjunto de votantes con perfil unánime a una situación inicial, se puede asegurar que no será elegido ningún candidato que sea peor que todos los candidatos elegidos inicialmente, es decir, no será elegido ningún candidato que para esos votantes, y según sus preferencias, sea menos preferido que el peor de los ya elegidos.

Se podría decir que, en este caso, si esta propiedad se cumple, ningún votante que pretenda garantizarse al menos un resultado mínimo (votante pesimista) preferiría abstenerse a votar pues, con su voto consigue que, al menos, no resulte elegido entre los nuevos candidatos ganadores uno peor que el candidato que era el menos preferido, de acuerdo a sus preferencias, cuando no votaba.

Definición 3.11 (Participación Pesimista Fuerte)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de Participación Pesimista Fuerte*** (*PPesFuer*) si, para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$ donde v es unánime, se cumplen las siguientes condiciones:

a) Si $f(X, p) = \{x\}$, entonces $\text{Inf}_v\, f(X, p+v) \geq_v f(X, p)$
b) $\text{Inf}_v\, f(X, p+v) >_v \text{Inf}_v\, f(X, p)$.

Es decir, cuando se agrega un conjunto de votantes unánime a una situación inicial, se puede asegurar que, salvo que siga siendo el único elegido, no será elegido ningún candidato que sea peor o igual que todos los candidatos elegidos inicialmente.

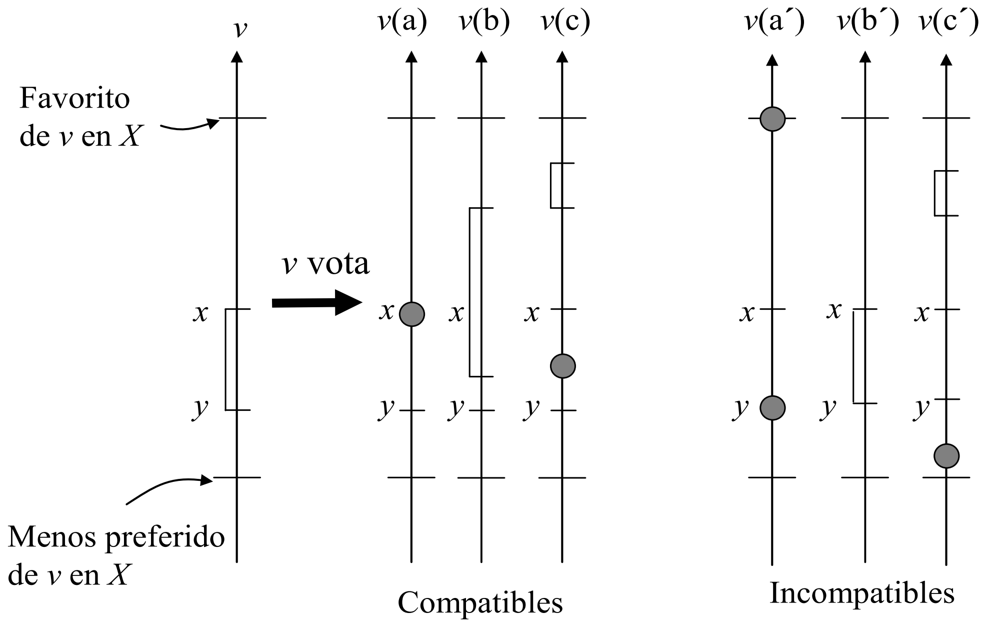


Figura 3.4 Situaciones compatibles y no compatibles con la propiedad de Participación Pesimista Fuerte

En la Figura 3.4 se puede apreciar que esta propiedad de Participación Pesimista Fuerte es más exigente que la de Participación Pesimista pues, salvo que exista un único candidato elegido, cuando agregamos los nuevos votantes, entre los nuevos candidatos elegidos el menos preferido ha de ser estrictamente mejor que aquel que era el menos preferido, y, en la situación inicial, antes de que votaran. Por eso mismo, mientras la nueva situación v'(a) es compatible para Participación Pesimista, no lo es con la Participación Pesimista Fuerte.

CV-Participación

La propiedad que aparece a continuación fue definida inicialmente en Pérez (1995) aunque con el nombre de Participación de Elección (Choice Participation) y, posteriormente, como CV-Participación en Pérez (2001), en un primer intento de extender el concepto inicial de Participación de Moulin (1988a) al contexto más general de correspondencias de votación.

Definición 3.12 (CV-Participación)

Una correspondencia de votación f cumple la ***propiedad de CV-Participación*** (*PCV*) si, para cualquier par de situaciones (X, p) y (X, v), donde el perfil v es unánime, si $x \in f(X, p)$ y $x >_v y$, entonces $y \in f(X, p + v)$ implica $x \in f(X, p + v)$.

Si x es elegido en el perfil p y aparecen nuevos votantes con el mismo perfil v (del que x no es necesariamente favorito) que prefieren a x antes que a y, y sólo puede ser elegido en $p+v$ si x también lo es.

3.3.2. Relaciones entre las distintas Propiedades de Participación.

¿Qué relación existe entre las distintas propiedades de Participación definidas? Aun cuando a primera vista podría parecer que todas las propiedades de participación son similares, ésta es una intuición falsa como se pone de manifiesto en las siguientes proposiciones, cuya información aparece, de un modo resumido, en la Figura 3.5.

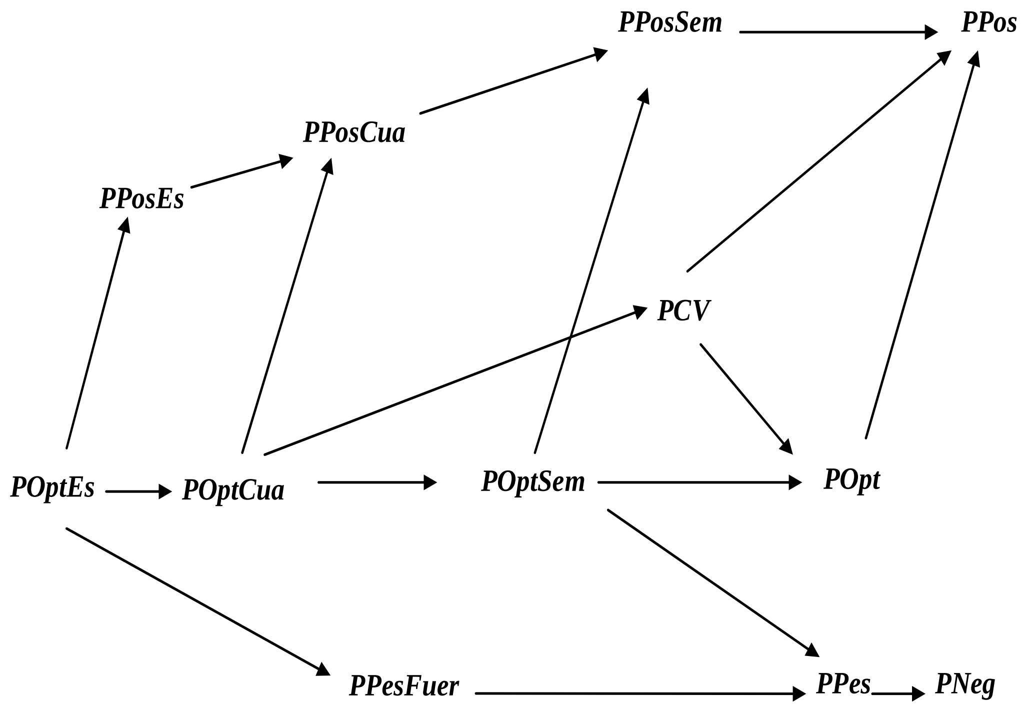


Figura 3.5 Principales implicaciones entre las distintas propiedades de Participación

Hay que señalar, en primer lugar, que las relaciones de implicación entre las propiedades de Participación Optimista y sus correlatos de Participación Positiva (e igualmente entre Participación Pesimista y Participación Negativa) son inmediatas, como se puso de manifiesto en sus definiciones. Por ejemplo, la definición de Participación Positiva Semiestricta se obtiene de suponer, en la definición de Participación Optimista Semiestricta, que el candidato favorito del nuevo votante *v* es uno de los elegidos en la situación inicial *p*.

Pero dejando de lado los debilitamientos y reforzamientos naturales de algunas propiedades, ya en Pérez (2001) se demuestra que la Participación Positiva es un debilitamiento de la propiedad CV-Participación, al establecer la siguiente proposición:

Proposición 3.1 (Pérez, 2001)

Sea una correspondencia de votación *f*. Si cumple la propiedad *PCV* entonces cumple *PPos*.

En este sentido, la siguiente proposición pone de manifiesto la relación entre las propiedades de Participación Optimista, Participación Positiva y Negativa, y CV-Participación, por un lado, y Participación Pesimista y Participación Negativa, por otro, demostradas en Jimeno (2003).

Proposición 3.2 (Jimeno, 2003)

a) ***PCV*** no implica ***PNeg***.
b) ***PCV*** implica ***POpt***.
c) ***POpt*** implica ***PPos***.
d) ***PPes*** implica ***PNeg***.
e) ***PCV*** no implica ***PNeg***.

La siguiente proposición recoge, de entre las otras implicaciones recogidas en la Figura 3.5 aquellas cuya justificación no es completamente evidente. No se recogen, en consecuencia, las implicaciones desde los distintos tipos de Participación Optimista a sus correlatos de Participación Positiva (salvo una de ellas a modo de ilustración), ni tampoco las implicaciones desde las versiones fuertes a las débiles de una misma definición

***Proposición* 3.3**

a) ***POptEs*** *implica* ***PPosEs****.*

b) ***POptEs*** *implica* ***PPesFuer*****.**

c) ***POptCua*** *implica* ***PCV*****.**

d) ***POptSem*** *implica* ***PPes*****.**

Demostración:

a) Supongamos que f cumple ***POptEs***. Entonces, para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$ donde v es unánime, se cumple que, si $x \in f(X, v)$ y $x >_v z$, entonces $z \notin f(X, p+v)$, por tanto, si v es tal que $x >_v z$ para cualquier $z \in X$, el único ganador en la situación $(X, p+v)$ es precisamente z, es decir, $f(X, p+ v) = \{x\}$, con lo cual se cumple la ***PposEs***.

b) Supongamos que f cumple ***POptEs***. Entonces, para cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$ donde v es unánime, se cumple que $\mathrm{Inf}_v\, f(X, p+v) \geq_v \mathrm{Sup}_v\, f(X, p)$ y, por tanto, si $f(X, p) = \{x\}$, entonces $\mathrm{Inf}_v\, f(X, p+v) \geq_v f(X, p) = \{x\}$ y, además, si el conjunto de ganadores de la nueva situación está constituido por más de un candidato, $\mathrm{Inf}_v\, f(X, p+v) >v\ \mathrm{Inf}_v\, f(X, p)$. Por lo tanto, se cumple ***PPesFuer***.

c) Supongamos que f cumple ***POptCua***. Dado cualquier par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$ donde v es unánime, supongamos que $x \in f(X, p)$, que $x >_v y$ y que $y \in f(X, p + v)$. En virtud de la condición (b) de la definición de *POptCua*, $y \in f(X, p)$ y por tanto, en virtud de la condición (c) se implica que $x \in f(X, p + v)$. En consecuencia, f cumple ***PCV***.

d) Supongamos que f cumple ***POptSem***. Demostraremos por contradicción que f cumple ***PPes***. Si f no cumpliera *PPes*, existiría un par de situaciones (X, p) y $(X, p+v)$ donde v es unánime, tales que $\mathrm{Inf}_v\, f(X, p) >_v \mathrm{Inf}_v\, f(X, p + v)$. En ese caso, $\mathrm{Inf}_v\, f(X, p + v)$ no pertenecería a $f(X, p)$, y en virtud de la condición (b) de la definición de *POptSem*, $\mathrm{Inf}_v\, f(X, p + v)$ no pertenecería a $f(X, p+v)$, lo que contradiciería la hipótesis de partida. □

Por su parte, la siguiente Proposición recoge afirmaciones de no implicación (aquellas cuya justificación no es obvia) que permiten ver la Figura 3.5 como un árbol completo de relaciones lógicas.

Proposición 3.4

a) ***PCV*** *no implica* ***PPosSem***.

b) ***POptCua*** *no implica* ***PPosEs*** *ni* ***PPesFuer***.

c) ***PPosEs*** *no implica* ***POpt*** *ni* ***PNeg***.

d) ***POptSem*** *no implica* ***PCV***.

Demostración:

a) Para demostrar que ***PCV*** no implica ***PPosSem***, consideremos la correspondencia f definida así sobre el conjunto $X = \{x, y, z, t\}$:

$f(X, p) = X$ si p contiene algún votante con preferencias $x > y > z > t$,

$f(X, p) = \{x, z\}$ en caso contrario.

Es evidente que f cumple *PCV* (el conjunto de ganadores puede pasar de $\{x, z\}$ a X, pero no al revés). Sin embargo, f no cumple *PPosSem*, porque si a un perfil p que no contuviera ningún votante con preferencias $x > y > z > t$, se le añadiera un votante v con dichas preferencias, tendríamos $f(X, p) = \{x, z\}$ y $f(X, p+v) = X$, lo que contradice *PposSem* (ya que y pasa a ser elegido en $p+v$, a pesar de que es menos preferido que x y además no era elegido en p).

Este contraejemplo puede visualizarse así:

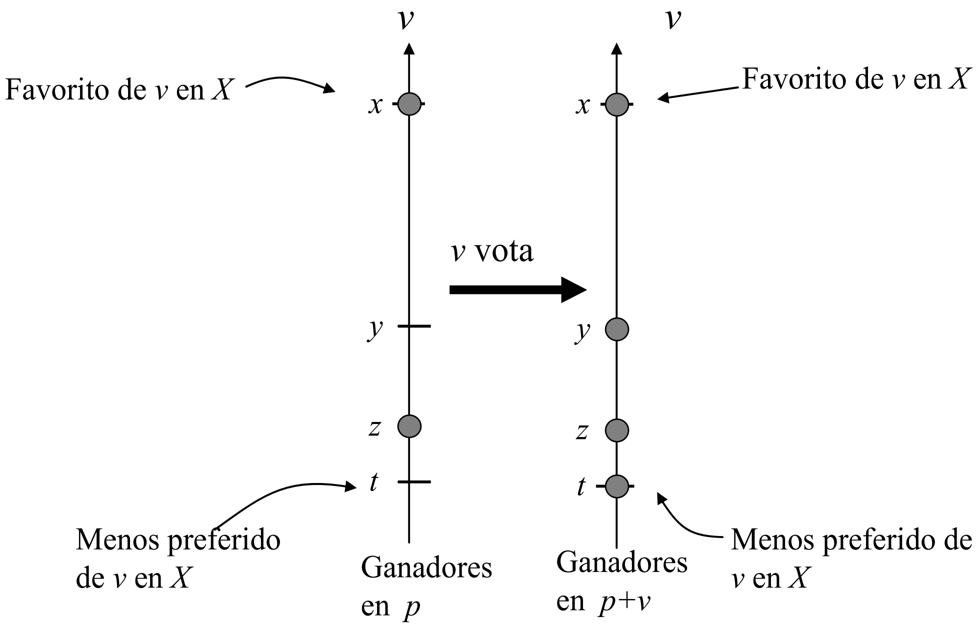


Figura 3.6 PCV no implica PPosSem

b) Para demostrar que ***POptCua*** no implica ***PPosEs*** ni ***PPesFuer***, consideremos la correspondencia f en la que son ganadores, en cualquier situación, todos los candidatos de X, y dos situaciones cualesquiera p y $p+v$. Es fácil ver que f cumple *POptCua*, ya que en el paso de p a $p+v$, el favorito de v sigue siendo elegido, no hay elegidos en $p+v$ que no lo fueran en p, y se cumple de manera obvia la tercera condición. Sin embargo, f no cumple *PPosEs*, que exigiría que el favorito de v fuese el único elegido en $p+v$. Además, f no cumple *PPesFuer*, que exigiría, al no haber un único elegido en $p+v$, que el antifavorito de v no siguiera siendo elegido en $p+v$.

c) Para demostrar que ***PPosEs*** no implica ***POpt*** ni ***PNeg***, se hará uso de la correspondencia de votación f_{RP} (refinamiento de Pluralidad) que establece que si el conjunto de elegidos por Pluralidad es múltiple, será elegido de entre ellos el candidato que tenga más últimos puestos, y en caso de que siga habiendo varios, será elegido de entre ellos el candidato que tenga más penúltimos puestos. Es fácil ver que f_{RP} cumple *PPosEs*, porque si un candidato x es ganador (no necesariamente el único) en una situación y se añade un conjunto unánime de votantes que lo tiene como favorito, x pasará a ser el único elegido (porque ya tendría más primeros puestos que ninguno de los demás candidatos).

Sea una situación (X, p) con el siguiente perfil de preferencias p con $m = 2$ votantes y un conjunto de candidatos $X = \{a, b, c, d\}$:

1 votante: $b > c > a > d$

1 votante: $a > b > c > d$

En esta situación está claro que $f_{RP}(p) = \{a\}$. Si añadimos a la situación inicial un nuevo votante v con preferencias $c > d > a > b$, es evidente que $f_{RP}(p+v) = \{b\}$. En consecuencia, f_{RP} no cumple ni *POpt* ni *PNeg*.

d) Demostrar que ***POptSem*** no implica ***PCV***, es equivalente a demostrar que *No POpSem* no implica *No PCV*. Sea la situación representada en la Figura 3.7 en la que $f(p) = \{x, y\}$ y $f(p+v) = \{x, y, z\}$, siendo $x >_v y >_v z$. Está claro que no se cumple *POpSem* puesto que en $(p+v)$ resulta elegido z que no lo era en p y, además, $y >_v z$. Sin embargo, sí se cumple *PCV*, puesto que todos los elegidos en p (los candidatos x, y) también lo son en $(p+v)$. □

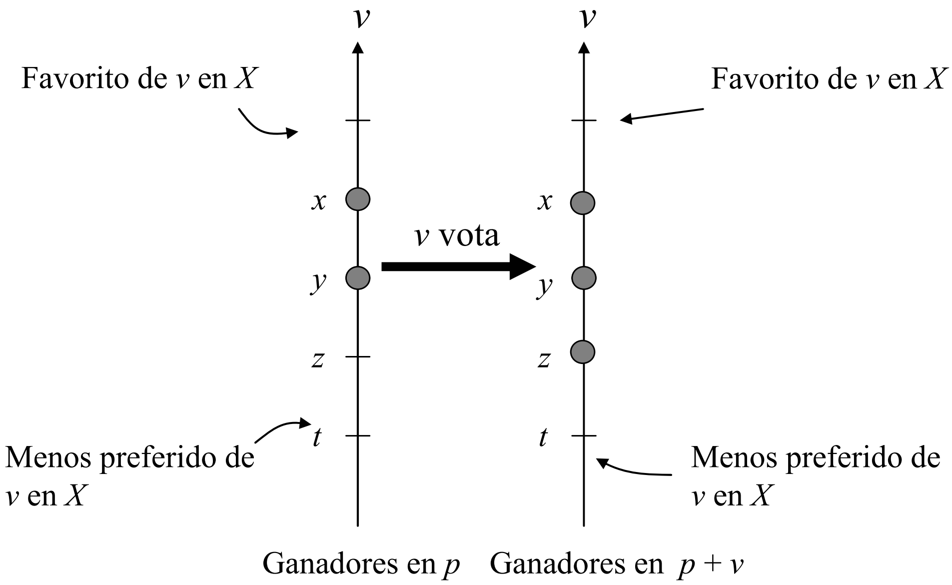


Figura 3.7 Situación en la que se muestra que POptSemi no implica PCV

3.3.3. Participación sobre Órdenes de Conjuntos.

Las distintas Propiedades de Participación definidas en la sección anterior se han obtenido de manera natural, es decir, sin hacer referencia explícita a ningún orden concreto de preferencias entre los conjuntos de ganadores. Pues bien, dado que cualquier propiedad de Participación trata precisamente de reflejar que el resultado obtenido después de tomar la decisión de votar no significa un empeoramiento en relación a aquel que se obtendría si ese mismo votante se abstuviese, nos interesa también poder definir propiedades de participación cuando tomamos como referencia órdenes entre conjuntos, es decir, propiedades de participación surgidas a partir de ordenes ya definidos sobre el conjunto de los conjuntos posibles de candidatos (*Power Set*), definidos ya en la Sección 2.6.1 del Capítulo 2.

A partir de un orden definido sobre conjuntos O compatible con un orden lineal de los candidatos L (es decir, un orden O que extiende las preferencias a partir de un orden lineal L) podemos hacer la siguiente definición general de participación:

Definición 3.13 (Participación según un Orden O)

Dado el orden *O* entre conjuntos, basado en un orden lineal *L*, decimos que una correspondencia de votación *f* cumple *O-Participación* (abreviado *P-O*) si para todo perfil *p* y todo votante *v* es falso que *f*(*p*) *O* *f*(*p*+*v*). Dicho de otro modo, no existe ningun perfil *p* y ningún votante *v* tales que *f*(*p*) *O* *f*(*p*+*v*) para las preferencias de *v*.
En otras palabras, *O-Participación* significa que ningún votante verá empeorar, en el sentido del orden *O*, los resultados de la votación al realizar su voto (o lo que es lo mismo, mejorar esos resultados, en el sentido del orden *O*, al abstenerse).

Dado un orden lineal *L*, y dos órdenes entre conjuntos *O* y *O'*, basados en *L*, diremos que *O* es más fuerte o estricto que *O'*, si *AOB* implica *AO'B* para todo *A* y *B* (es decir, $(A, B) \in O$ implica $(A, B) \in O'$ para todo *A* y *B*).

En lo que sigue, omitiremos en ocasiones la referencia explícita a las preferencias de *v*, ya que se darán por supuesto.

Según esta definición general de Participación, podemos establecer la siguiente relación entre órdenes y propiedades de participación:

Proposición 3.5 (Ordenes y Propiedades de Participación)

Dados dos órdenes cualesquiera entre conjuntos, *O* y *O'*, si el orden *O'* es más estricto que el orden *O*, entonces la propiedad de Participación *P-O* implica la propiedad *P-O'*.

Demostración:
Sean *O* y *O'* dos órdenes cualesquiera entre conjuntos tales que *O'* es más fuerte que *O*. Si para una correspondencia de votación *f* cumple la propiedad de Participación *P-O* entonces no existe ningún perfil *p* y ningún votante *v* tales que *f*(*p*) *O* *f*(*p*+*v*), y esto implica que no existe ningún perfil *p* y ningún votante *v* tales que *f*(*p*) *O'* *f*(*p*+*v*) (ya que si ocurriera *f*(*p*) *O'* *f*(*p*+*v*), entonces también ocurriría *f*(*p*) *O* *f*(*p*+*v*)), y por tanto *f* también cumple la propiedad de Participación *P-O'*. En consecuencia, ***P-O*** implica ***P-O'***. □

Así, por ejemplo, dados los ordenes *AVB* (que, recordemos de la Sección 2.6.1 del Capítulo 2, significa que el conjunto de candidatos *A* es preferido al conjunto de candidatos *B*, en el sentido de la utilidad esperada, para algunos votantes con función de utilidad consistente con el orden lineal *L*) y *AVBU* (*A* es preferido a *B*, en el sentido de la utilidad esperada para una distribución de probabilidad a priori uniforme, para algunos votantes con función de utilidad consistente con *L*), puesto que *AVBU* es más estricto que *AVB*, la propiedad *P-AVB* implica la propiedad *P-AVBU*.

De acuerdo con la Proposición 3.5, podemos establecer las siguientes implicaciones entre distintas propiedades de participación definidas a partir de órdenes entre subconjuntos:

Proposición 3.6

a) ***P-TVB*** *es equivalente a* ***P-CDD.***
b) ***P-LMM*** *no implica* ***P-TVBU.***
c) ***P-AVBU*** *implica* ***P-PE, P-AVBU*** *implica* ***P-Opt y P-LMM*** *implica* ***P-TVB.***
d) ***P-LMM*** *implica* ***P-(Opt y Pes)***
e) ***P-AVBU*** *implica* ***P-LMM.***
f) ***P-Opt*** *no implica* ***P-DD, P-Pes*** *no implica* ***P-DD y P-ABVU*** *no implica* ***P-(Opt y Pes).***

Demostración**:**
Inmediata a partir de la Proposición 2.1 y la Proposición 3.5. □

En la Figura 3.8 se recoge de nuevo la relación entre órdenes establecida en la Figura 2.7 y la Proposición 2.2 del Capítulo 2 que, según la Proposición 3.5 da lugar a la relación entre propiedades de participación que esquemáticamente se muestran en la Figura 3.9.

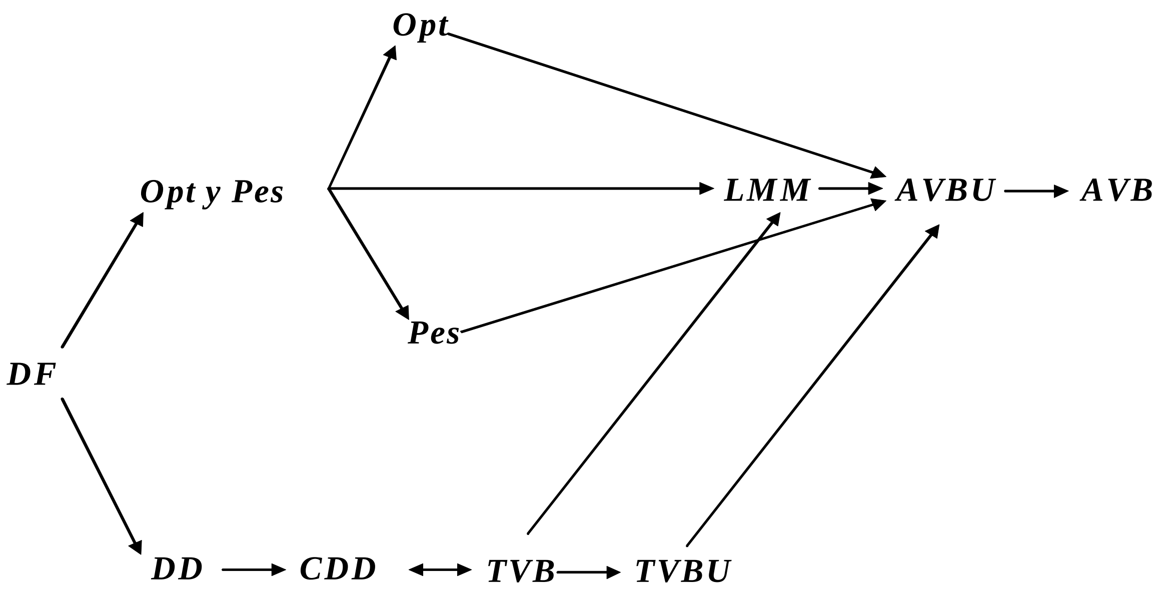


Figura 3.8 Principales implicaciones entre órdenes de preferencias sobre conjuntos

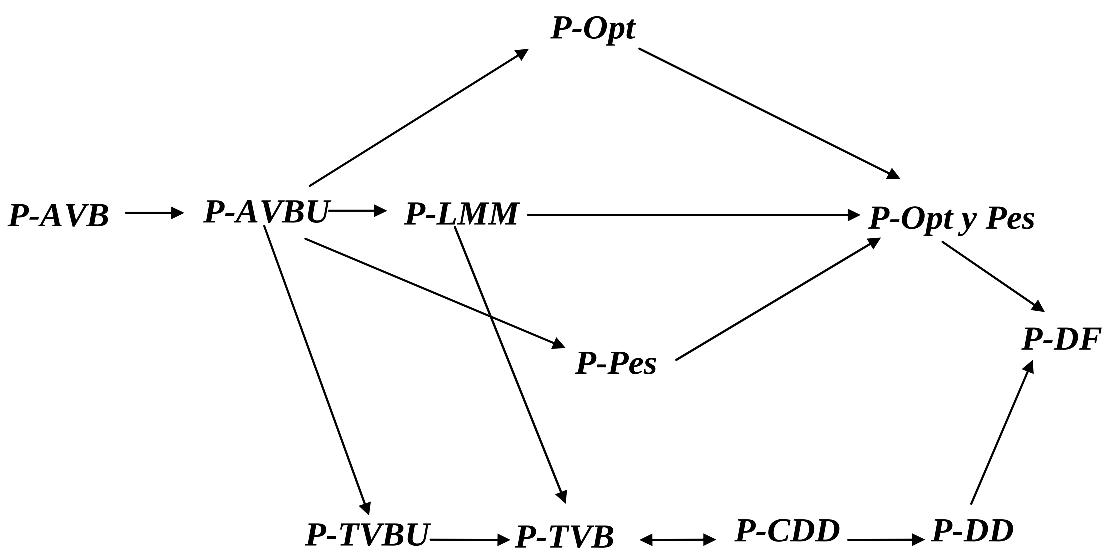


Figura 3.9 Principales implicaciones entre las distintas propiedades de Participación definidas según un Orden

Es fácil observar que las propiedades de Participación Optimista y Pesimista *(POpt* y *PPes*, respectivamente) definidas en la Sección 3.3.1, poseen una definición equivalente basada en el concepto de Participación según los órdenes Optimista y Pesimista (*P-Opt* y *P-Pes*, respectivamente) por lo que aparecen recogidas en la Figura 3.5 y en la Figura 3.9.

Para completar el estudio de la relación entre las distintas propiedades de participación, en la siguiente Proposición 3.7 se recogen las implicaciones entre las propiedades de Participación definidas de un modo natural a partir del concepto de Participación en funciones de votación Figura 3.5) y aquellas surgidas a partir de una extensión del orden de preferencias sobre conjuntos de candidatos (Figura 3.9). Dado que algunas de estas relaciones son triviales, nos limitaremos a aquellas que van más allá de un simple reforzamiento, o no responden directamente de las implicaciones entre los órdenes entre conjuntos que las definen.

No obstante, antes de llevar a cabo dicho análisis es preciso tener en cuenta la siguiente propiedad que recogemos en forma de Lema:

Lema 3.1

Dado dos conjuntos A y B, si existe un elemento $a \in A\text{-}B$, tal que $a < Inf\, B$, entonces podemos decir que B *AVBU* A (lo cual implica que es falso que A *TVBU* B).

Demostración**:**

Sean los conjunto A y B, con $a \in A\text{-}B$ tal que $a < Inf\, B$, como se muestra en la Figura 3.10.

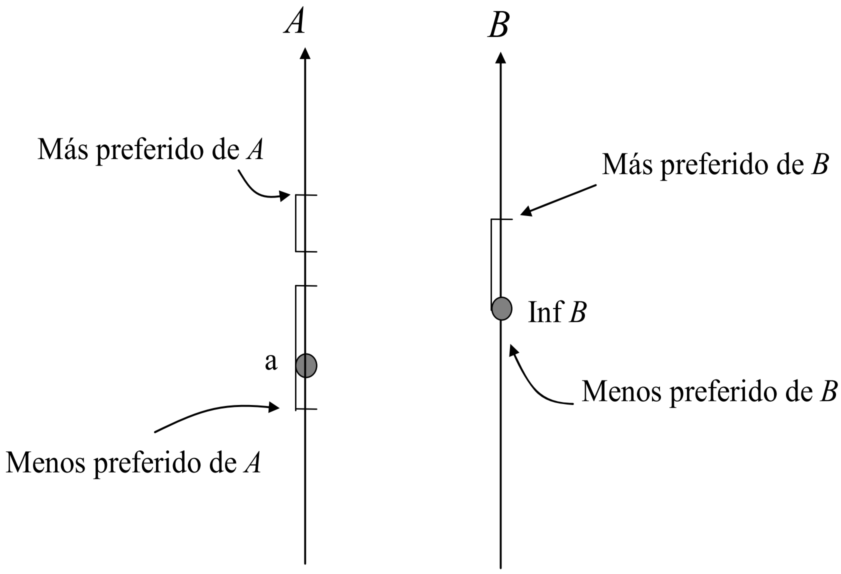


Figura 3.10

Consideremos la distribución de probabilidad Uniforme y una función de Utilidad U que cumpla:

1) $U(x) \approx 1+\varepsilon$, para $x > Inf\, B$, siendo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño.
2) $U(x) = 1$ para $x = Inf\, B$
3) $U(x) \approx 0$ para $x < Inf\, B$
4) $U(x) = 0$ para $x = a$

Obsérvese que el único elemento en B que tiene utilidad 1 es $Inf\, B$ y que los que están por encima tienen una utilidad estrictamente mayor que 1 aunque la diferencia es mínima. De igual modo, en el conjunto A, $U(a) = 0$ y los que están por encima de a tienen una utilidad mayor que 0 pero en una diferencia mínima.

De este modo:

1) $UE(B) \geq 1$
2) $UE(A) = \sum_{x \geq InfB} p(x).U(x) + \sum_{x < InfB} p(x)U(x) < 1$

Así pues, $UE(A) < UE(B)$, y por tanto B $AVBU$ A. En consecuencia, es falso que A $TVBU$ B. □

A partir de este Lema 3.1 podemos establecer la siguiente proposición:

Proposición 3.7

a) ***PPesFuer*** *implica* ***P-LMM***.

b) ***PPesFuer*** *implica* ***P-TVBU***.

c) ***POptCua*** *implica* ***P-AVB***.

Demostración:

a) Supongamos una situación inicial (X, p), y otra situación donde un votante v decide votar $(X, p+v)$, siendo el resultado en la situación inicial $f(p) = A$ y, en la situación final, $f(p+v) = B$.

Si f cumple ***PPesFuerte***, o bien $A = \{x\}$ y Inf $B \geq_v x$, o bien Inf $B >_v$ Inf A. En cualquier caso es claro que, o bien $B = A$ o bien B *LexiMin* A, y por tanto A ~~*LMM*~~ B. En consecuencia, f cumple ***P-LMM***.

b) Supongamos que se verifica ***PPesFuer***. Consideremos las dos posibilidades compatibles con esta propiedad. En la primera, $A = \{x\}$ y $x \leq Inf\, B$, lo que implica obviamente que es falso que A *TVBU* B. En la segunda, $x = Inf\, A < Inf\, B$, lo que implica, en virtud del Lema 3.1, que es falso que A *TVBU* B.

c) Supongamos que f verifica ***POptCua***. Si existe $x \in A - B$, entonces $x <_v Inf\, B$ y, del mismo modo, si existe $y \in B - A$, entonces $y >_v Sup\, A$. Por lo tanto, en todos los casos, o bien B supera a A en el sentido del orden Cuasi Dominación Débil (B *CDD* A), o bien $B = A$. En virtud de la equivalencia de órdenes *CDD* con *TVB*, ocurre que o bien B *TVB* A o bien $B = A$. En conclusión, f verifica ***P-AVB*** y así la implicación inicial queda demostrada. □

Tan importante como demostrar la relación de implicación entre las distintas propiedades de participación es conocer la falta de relación entre dichas propiedades. En lo que sigue abordaremos esta cuestión con el propósito de completar el análisis realizado.

Proposición 3.8

a) ***PPes*** *no implica* ***P-DD.***

b) ***P-AVBU*** *no implica* ***PCV****.*

c) ***P-AVBU*** *no implica* ***POptSem****.*

d) ***PPosEs*** *no implica* ***P-DF.***

Demostración:

Para demostrar esta proposición nos ayudaremos de gráficos en los que se comparan los conjuntos de ganadores, $f(p)$ y $f(p+v)$, sobre el perfil de preferencias de un votante v, siendo p el perfil correspondiente a la situación en que ningún votante con esa preferencias vota y $p+v$ el correspondiente a la situación en la que dicho votante v decide votar.

a) ***PPes*** no implica ***P-DD***.

Consideremos una situación y una correspondencia de votación f como la representada en la Figura 3.11 en la que $f(p) = \{x, y\}$ y $f(p+v) = \{y\}$, siendo $x >_v y$. Se observa claramente que f cumple *Participación Pesimista*, pero no cumple *P-DD*, puesto que $f(p)$ *DD* $f(p+v)$.

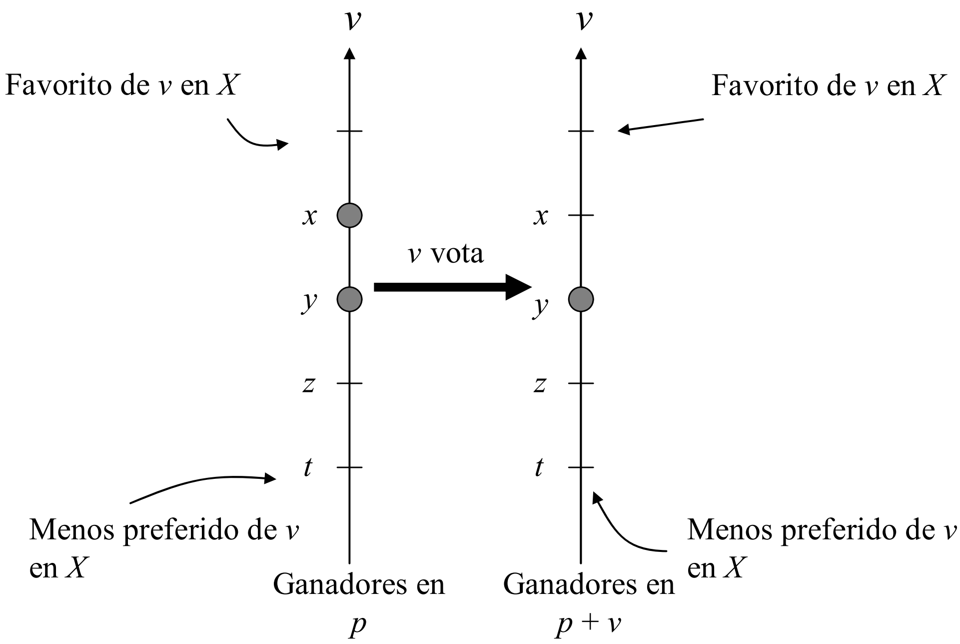


Figura 3.11 Situación en la que se muestra que PP no implica P-DD

b) ***P-AVBU*** no implica ***PCV***.

Sea ahora la situación representada en la Figura 3.12, en la que $f(p) = \{x, z, t\}$ y $f(p+v) = \{x, y, t\}$, siendo $x >_v y >_v z >_v t$. Se observa como se cumple la propiedad *P-AVBU* o, lo que es lo mismo, todos los votantes bayesianos con distribución de probabilidad uniforme prefiere $f(p+v)$ a $f(p)$ y, sin embargo, no se verifica *PCV*, dado que t es elegido en $(p+v)$ y sin embargo z no lo es aunque $z >_v t$.

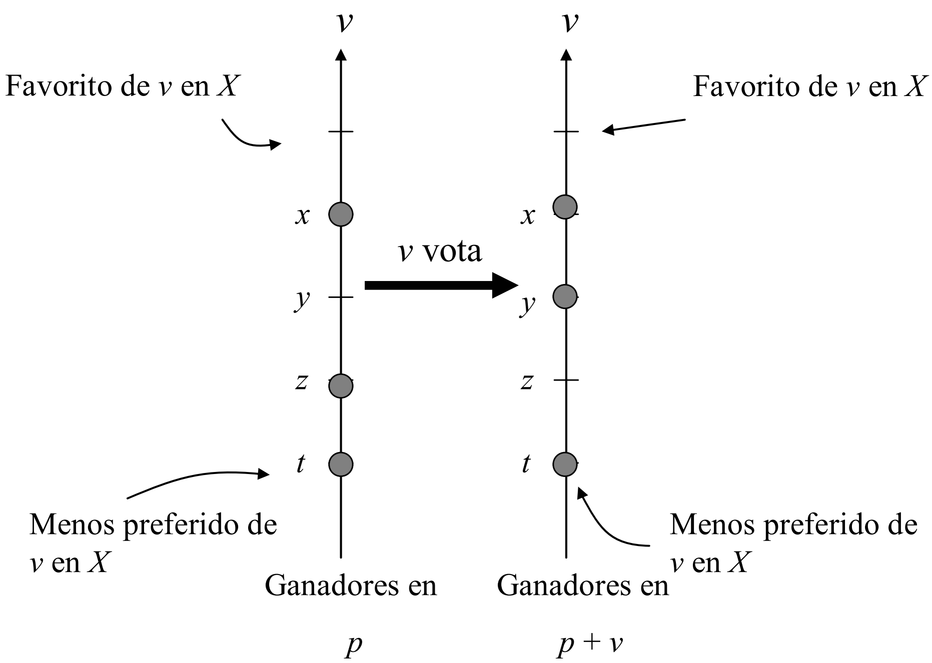


Figura 3.12 Situación en la que se muestra que P-ABVU no implica PCV

c) ***P-AVBU*** no implica ***POptSem***.

Sea la situación representada en la Figura 3.13 en la que $f(p) = \{x, z\}$ y $f(p+v) = \{x, y\}$, siendo $x >_v y >_v z$. Se observa que f cumple *P-AVBU*, ya que todos los votantes bayesianos con distribución de probabilidad uniforme prefieren $f(p+v)$ a $f(p)$), y sin embargo no se cumple *POpSem*, ya que en $(p+v)$ resulta elegido y que no lo era en p.

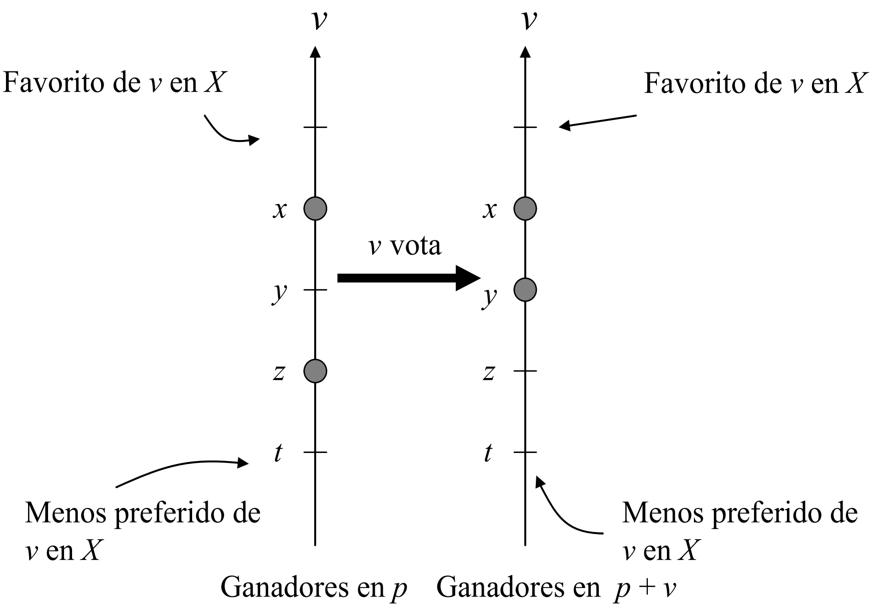


Figura 3.13 Situación en la que se muestra que P-AVBU no implica POptSem

d) ***PPosEs*** no implica ***P-DF***.

Véase el contraejemplo utilizado en el apartado c) de la Proposición 3.4. □

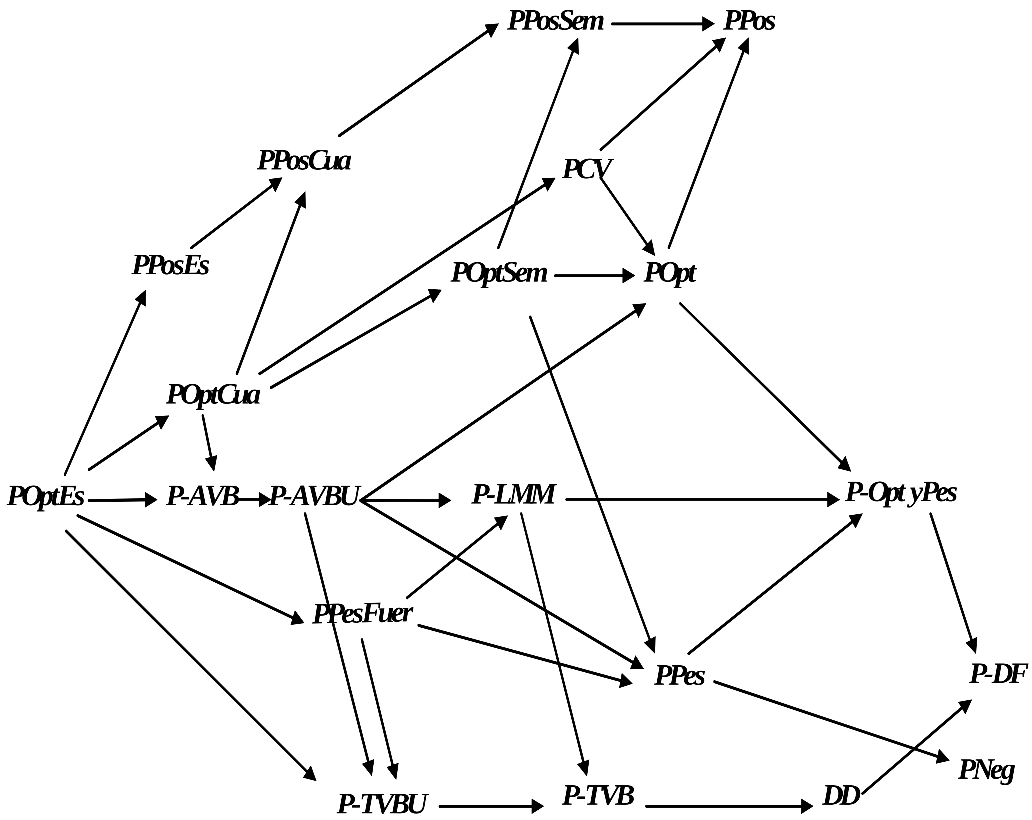


Figura 3.14 Esquema de relaciones entre las propiedades de Participación

Una vez demostradas las principales implicaciones entre todas las Propiedades de Participación definidas anteriormente, la Figura 3.14 engloba, en una sola, las implicaciones recogidas en la Figura 3.5 y en la Figura 3.9, y representa, de forma completa, todas las relaciones entre las distintas propiedades de Participación definidas.

3.3.4. Extensión del Teorema de Moulin. Resultados Conocidos.

A partir de las primeras definiciones de Participación en el contexto general de las correspondencias de votación contenidas en la Sección 3.3.1, se obtuvieron los primeros resultados de extensión del Teorema de Moulin a correspondencias de votación Condorcet.
Así, en Pérez (1995) se presenta el siguiente resultado:

Proposición 3.9 (Pérez, 1995)

Ninguna correspondencia de votación f consistente con el principio de Condorcet satisface la propiedad de CV-Participación.

Esta Proposición establece que, si tratamos con correspondencias de votación Condorcet, siempre existen situaciones en las que un votante, con su voto sincero, puede lograr que el conjunto de ganadores sea modificando de modo que, algunos candidatos ganadores (al menos uno) sean sustituidos por uno o varios candidatos peores según sus preferencias y, en ese sentido, el votante resultaría penalizado por su decisión de votar. En consecuencia, le resultaría más provechoso abstenerse.

Por su parte, en Pérez (2001) se observa que el resultado alcanzado para la CV-Participación no es extensible a las propiedades de Participación Positiva y Negativa. Es decir, si debilitamos la definición de Participación, en el sentido indicado por la propiedad de Participación Positiva (o de un modo simétrico, tal y como nos indica la Participación Negativa), ya no se puede afirmar de manera absoluta que todas las correspondencias Condorcet se vean afectadas por la correspondiente paradoja de la abstención, salvo que se trate de correspondencias que respeten algún requisito adicional de dominación.

En concreto, y sin entrar a definirlos formalmente, el concepto de C1-Dominación establece que, un candidato x C1-domina a otro candidato y, si le gana por mayoría estricta y, además, gana a cualquier otro candidato z al que y gana o con el que empata. Por su parte, un candidato x C2-domina a otro candidato y, si le gana por mayoría estricta y, además, obtiene un número de votos igual o mayor que y en la comparación por pares con terceros candidatos. Dadas estas definiciones, se dice que una correspondencia de votación ***f*** **respeta débilmente** ***C1-Dominación (C2-Dominación)*** siempre que, para cualquier situación (X, p), si un candidato y está C1-dominado (C2-dominado), entonces f no puede elegirlo como ganador.

Proposición 3.10 (Pérez, 2001)

a) Ninguna correspondencia de votación f consistente con el principio de Condorcet que respete débilmente C1-Dominación satisface la propiedad de Participación Positiva.
b) Ninguna correspondencia de votación f consistente con el principio de Condorcet que respete débilmente C1-dominación satisface las propiedades de Participación Negativa y Translación Invariante.

La propiedad de Translación Invariante representa una exigencia técnica muy débil, necesaria para alcanzar el mismo resultado de Participación Positiva para Participación Negativa.

Definición 3.14 (Traslación Invariante)

Dadas dos situaciones cualesquiera (X, p_1) y (X, p_2), donde $p_2(x, y) = p_2(y, x)\ \forall x, y \in X$, se dice que una correspondencia de votación f satisface la propiedad ***Traslación Invariante*** si y sólo si, $f(X, p_1) = f(X, p_1 + p_2)$.

Con esta propiedad se trata de poner de manifiesto el hecho de que si se añade a un electorado un conjunto de votantes con un perfil de preferencias simétrico, es decir, que no favorece a ningún candidato en particular sino que hace que la relación entre ellos, medida a través de la matriz de comparaciones, se mantenga intacta, entonces también se mantendrá inalterado el conjunto de candidatos ganadores.

Pues bien, estos resultados nos indican que todas las correspondencias de votación Condorcet (que respeten débilmente la C1-Dominación) incumplen estas dos propiedades y, por lo tanto, están sometidas a las correspondientes Paradojas de la Abstención que, en este caso y siguiendo la terminología de Pérez (2001), se denominan respectivamente, Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva y Negativa.

En particular, que se produzca la Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva significa que, si elegimos como procedimiento de elección una correspondencia de votación Condorcet, siempre existirán situaciones en las que un votante, con su voto sincero, puede impedir que salga como candidato ganador su candidato favorito. De igual modo, que se produzca la Paradoja Fuerte de la Abstención Negativa significa que la decisión de votar de un votante puede hacer que sea elegido entre los ganadores su candidato menos deseado. Parece claro que, en ambas situaciones, el votante resulta perjudicado por su decisión de votar (ver ejemplo ilustrativo en la Figura 2.5, segunda y tercera parte respectivamente).

Ahora bien, como he señalado, los resultados anteriores ya no son resultados generales como ocurría en el caso de la CV-Participación pues, por ejemplo, un importante método Condorcet, el método MaxMin, sí cumple las propiedades de Participación Positiva y Negativa, estando libre de la Paradoja Fuerte de la Abstención tanto Positiva como Negativa
En este sentido, en Pérez (2001) también se demuestra que, un fortalecimiento de la Propiedad de respeto débil a la C2-Dominación (lo que denomina respeto débil de la C2-Dominación por un par) permite ampliar un poco más el mismo resultado parcial de incumplimiento de las propiedades de Participación Positiva y Negativa en correspondencias de votación Condorcet.

Proposición 3.11 (Pérez, 2001)

a) Ninguna correspondencia de votación *f* consistente con el principio de Condorcet, que respete débilmente C2-Dominación por un Par, satisface la propiedad de Participación Positiva.
b) Ninguna correspondencia de votación *f* consistente con el principio de Condorcet, que respete débilmente C2-Dominación por un Par, satisface las propiedades de Participación Negativa y Traslación Invariante.

De nuevo, el resultado sigue siendo parcial puesto que existen métodos Condorcet importantes (muy pocos) que quedan fuera de su alcance. Así, el método de Young queda sometido a la Paradoja Fuerte Positiva pero no a la Negativa, mientras que el método Maximin se libra de ambas (Young y Maximin incumplen el respeto débil de la C2-Dominación por un Par).

Por último, en Jimeno (2003) se buscan nuevos resultados de imposibilidad mediante el análisis de otras propiedades de participación. En particular, se definen e investigan las propiedades de Participación Optimista (fortalecimiento de Participación Positiva y simultáneamente debilitamiento de CV-Participación) y de Participación Pesimista (fortalecimiento de Participación Negativa), llegando a las siguientes conclusiones:

***Proposición 3.12* (*Jimeno, 2003*)**

a) Ninguna correspondencia de votación *f* consistente con el principio de Condorcet satisface la propiedad de Participación Optimista.
b) Ninguna correspondencia de votación *f* consistente con el principio de Condorcet satisface conjuntamente las propiedades de Participación Pesimista y Translación Invariante.

Así pues, este resultado de imposibilidad pone de manifiesto que, si debilitamos la CV-Participación no tanto como hasta Participación Positiva o Negativa, sino que nos quedamos en Participación Optimista y Positiva, de nuevo podemos obtener un resultado general para todas las correspondencias de votación Condorcet: todos los métodos Condorcet están sometidos a la Paradoja de la Abstención Optimista y Pesimista pues todos incumplen las Propiedades de Participación Optimista y Pesimista.

3.3.5. Paradoja de la Abstención y Manipulación.

El intento de profundizar aún más en la problemática de la Participación y en la obtención de nuevos resultados de extensión del Teorema de Moulin a correspondencias de votación Condorcet, como ya quedó de manifiesto en las Secciones 2.6 y 2.7 del capítulo anterior, presenta cierta analogía con las cuestiones relacionadas con la manipulación de los métodos de votación y, en concreto, con la extensión del Teorema de Imposibilidad de Gibbard (1973) y Satterthwaite (1975).

En el esquema del análisis de la manipulabilidad de los sistemas de votación, el Teorema de Imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite establece que toda función de elección social no dictatorial puede ser manipulada por un votante cualquiera a través de un voto que no refleje sus preferencias sinceras.

Por su parte, el resultado de Moulin (1988a), evidencia la importancia de la Paradoja de la Abstención en un grupo importante de funciones de elección social, los métodos Condorcet, estableciendo que todas las funciones de elección social consistentes con el principio de Condorcet se encuentran afectadas por la Paradoja de la Abstención o, dicho de otro modo, podían ser manipulables mediante la decisión de los votantes de no votar pues, al abstenerse, podrían obtener un resultado más preferido de acuerdo a sus preferencias.

Ya sabemos que en su versión original el teorema de imposibilidad de Moulin hace referencia exclusiva a funciones de votación. En ese marco, la definición en Moulin (1988a) de la propiedad de Participación (y la correspondiente Paradoja de la Abstención originada por el incumplimiento de dicha propiedad), parece ser la definición "natural".

Tratar de obtener un resultado análogo en el contexto extendido de las correspondencias de elección social, abre una serie de dificultades. Afortunadamente, como se ha señalado también en el Capítulo 2, intentar abordar el problema de extender el resultado de Moulin al esquema más general de las correspondencias de votación está relacionado con el problema de extender el resultado de Gibbard-Satterthwaite. Más en concreto, la analogía entre estos dos problemas de extensión es relevante al menos en dos aspectos importantes:

a) Ambos problemas comparten la necesidad de extender las preferencias individuales de los votantes, establecidas mediante órdenes lineales de los candidatos, a preferencias entre subconjuntos de candidatos y
b) Ambos problemas tratan sobre la manipulación por parte de los votantes.

En relación con el apartado a) cabe señalar que, en cualquier análisis de manipulación, tanto si ésta se produce a través de un comportamiento no sincero (modificación en las preferencias individuales), como si lo es a través de la decisión de votar o abstenerse, una de las cuestiones esenciales es determinar si es posible que un votante pueda resultar beneficiado cuando actúa de modo diferente al ingenuo o sincero, es decir, cuando intenta modificar su comportamiento y actuar estratégicamente en orden a conseguir un resultado de la votación más a su favor.

Establecer esta posible ganancia (beneficio) obtenida mediante la manipulación, sea cual sea la forma específica en la que ésta se lleve a cabo requerirá, por tanto, determinar una relación de preferencias para los votantes entre los posibles resultados de la votación, a partir del orden individual de preferencias (orden lineal) que sobre las distintas alternativas o candidatos individuales posea cada votante.

La manipulación habrá tenido lugar si se constata que un votante (no yendo a votar o emitiendo un voto estratégico) puede asegurarse un resultado de la elección más preferido al que obtendría si emitiera su voto con sus verdaderas preferencias.

Por lo tanto, el problema principal en cualquier definición de manipulación es cómo determinar cuándo un resultado es preferido a otro para un votante.

De nuevo, en funciones de votación (marco de análisis de los teoremas de Moulin y de Gibbard-Satterthwaite) esto resulta trivial, puesto que uno obtiene, para cada votante, la valoración del resultado directamente de su orden de preferencias sobre los distintos candidatos. Pero si, por el contrario, tratamos de extender estos resultados al caso general de las correspondencias de votación el problema se complica pues los resultados de la agregación de preferencias (subconjuntos de candidatos), no coinciden con la forma en que hemos definido las preferencias de los votantes (listas ordenadas de candidatos). Se trataría, pues, de extender ese orden entre alternativas a un orden entre subconjuntos de ellas.

En este sentido, y a pesar de que los primeros intentos de extensión del Teorema de Moulin, como vimos en la sección anterior, obtuvieron resultados para correspondencias de votación Condorcet sin necesidad de abordar de forma explícita el problema de extensión de las preferencias, la investigación desarrollada en profundidad sobre órdenes entre conjuntos en el Capítulo 2, y la correspondiente definición elaboradas aquí de las propiedades de Participación en función de dichos órdenes, permiten abordar el problema de manera más rigurosa y sistemática.

Por lo que respecta ya al apartado b), mientras que a la hora de extender el resultado de Gibbard-Satterthwaite la pregunta fundamental ha sido: ¿qué correspondencias de votación arbitrarias son manipulables mediante la emisión de una papeleta con unas preferencias que no son sinceras? a la hora de extender el resultado de Moulin la pregunta que hemos abordado es: ¿qué correspondencias de votación Condorcet son manipulables mediante la decisión de no votar?

Evidentemente, usar la abstención como medio de manipulación del resultado de una elección, es un recurso limitado en comparación con la posibilidad de usar cualquier posible papeleta no sincera. Por eso, la Paradoja de la Abstención es un fenómeno menos extendido que la paradoja convencional de manipulación (por ejemplo, las reglas posicionales están libres de la primera paradoja, pero no de la segunda). De hecho, en contextos más generales, la manipulación por abstención podría considerarse un caso particular de la manipulación del voto.

3.3.6. Nuevos resultados de Extensión del teorema de Moulin[5].

Una vez definidas las propiedades de Participación en función de órdenes de preferencias entre conjuntos, lo único que necesitamos para poder tratar la Paradoja de la Abstención desde el punto de vista de la manipulación es, precisamente, definir el concepto de *manipulación mediante abstención.* La siguiente definición es válida para todo concepto de orden de extensión como los presentados en el Capítulo 2.

---

[5] Parte de los resultados de esta sección aparecen recogidos en el artículo Jimeno, Pérez, y García (2008): "An extension of the Moulin No Show Paradox for voting correspondences", *Social Choice and Welfare* (de próxima publicación).

Definición 3.15 (Manipulación mediante Abstención en el sentido del orden O)

Dada una correspondencia de votación *f* y un concepto de orden de extensión ***O***, *f s*e denomina ***manipulable mediante abstención en el sentido de O*** (*o* ***O****-A-manipulable*) si existe una situación (*X, p*), y existe un votante con preferencias *p* en esta situación de forma que $f(X, p\text{-}v)$ $\boldsymbol{O_P}$ $f(X, p)$. *f se denomina* **Inmune** *a la manipulación mediante abstención en el sentido de O* (*o* **O***-A-inmune*) *si no es O-A-manipulable***.**

En otras palabras, *f* es *O-A*-manipulable si existe alguna situación en la que algún votante prefiere en el sentido del orden ***O***, el conjunto de resultados obtenido cuando se abstiene, al que obtenía cuando votaba. La relación de esta terminología de manipulación con la terminología de Participación de las secciones anteriores es evidente y se resume así: Una correspondencia de votación cumple la propiedad de *O*-Participación si y sólo si no es *O-A-* manipulable (es decir, si es *O-A*-inmune).

A partir del lema siguiente, ya utilizado en Jimeno (2003) en una versión ligeramente diferente en relación a las propiedades de Participación Optimista y Pesimista, y puesto ahora en relación a los órdenes *Opt* y *Pes* (y como se muestra en Jimeno, Perez y García. 2008), podemos obtener un resultado relativo a la manipulación mediante abstención en correspondencias de votación Condorcet.

Lema 3.2 (Jimeno, Pérez y García, 2008)

Dada cualquier correspondencia de votación Condorcet *f*, cualquier situación (*X, p*) y cualesquiera dos candidatos *x* y *z*, si

a) *f* es ***Opt****-A-inmune*, o
b) *f* es ***Pes****-A-inmune* y satisface *Traslación Invariante Débil*, entonces $\text{Min}_{y\in X}\, p(z, y) > p(x, z)$ implica $x \notin f(X, p)$.

Como se indica a partir de su nombre, la propiedad de *Traslación Invariante Débil* es un debilitamiento de la propiedad de Traslación Invariante (Definición 3.14) utilizada en Pérez (2001) y Jimeno (2003) en relación al incumplimiento de diversas propiedades de participación, como se ha señalado previamente. Más concretamente:

Definición 3.16 (Traslación Invariante Débil)

Una correspondencia de votación f satisface la propiedad de ***Traslación Invariante Débil*** si $f(X, p) = f(X, p+q)$, para cualesquiera dos situaciones (X, p) y (X, q) donde el perfil q consiste en todos los posibles órdenes lineales sobre X. Significa que, añadir un conjunto de votantes con preferencias equilibradas (es decir, con un perfil simétrico a cualquier situación), no altera el resultado de la votación.

Esta propiedad mínima es satisfecha por casi todas las correspondencias de votación.

A partir del Lema 3.2, se deduce la siguiente proposición:

Proposición 3.13 (Jimeno, Pérez y García, 2008)

a) Todas las correspondencias de votación Condorcet son manipulables mediante abstención en el sentido de ***Opt*** (o ***Opt***-*A-manipulables*).
b) Todas las correspondencias de votación Condorcet que satisfacen la Traslación Invariante Débil son manipulables mediante abstención en el sentido ***Pes*** (o ***Pes***-*A-manipulables*).

En otras palabras, cuando usamos correspondencias de votación Condorcet, podemos asegurar que existen situaciones y preferencias individuales en las que todo votante optimista (un votante que piensa que su candidato favorito entre los ganadores será el único finalmente elegido) con esas preferencias particulares, mejorará absteniéndose. Y lo mismo podemos decir en el caso de correspondencias de votación Condorcet que satisfagan la propiedad de Traslación Invariante Débil, para votantes pesimistas (que piensan que el candidato menos preferido entre los ganadores será finalmente el único elegido).

Por otro lado, es importante resaltar el hecho de que el apartado a) de la Proposición 3.13, permanece siendo válido obviamente si el orden *Opt* es reemplazado por cualquier otro orden de extensión (de los recogidos en el Capítulo 2) que sea menos estricto que (y en consecuencia implicado por) *Opt*, como por ejemplo, *AVBU*. Y, por supuesto, esto mismo puede decirse del apartado b).

Esto es así porque, tanto el orden *AVBU* como todos los implicados por el orden *Opt*, son órdenes más débiles y, como ya indicamos en la Sección 3.3.3, eso significa que, todo votante *v,* con preferencias según un orden *Opt*, que vea el conjunto de ganadores cuando se abstiene como preferido al conjunto de ganadores cuando decide votar, también debería verlo así si sus preferencias siguen un orden *AVBU*, dado que el orden *AVBU* está contenido en el orden *Opt*. Por lo tanto, si una correspondencia de votación es manipulables mediante abstención en el sentido de *Opt* (o *Opt-A*-manipulables), con más razón lo será en el sentido *AVBU*.

Ahora bien, ¿puede ser extendido el resultado de la Proposición 3.13 a órdenes de extensión más fuertes que ***Opt*** y que ***Pes*** o, al menos, replicado para órdenes de extensión no implicados por ***Opt*** y ***Pes***? La siguiente Proposición 3.14 muestra que, para un orden de extensión relativamente más débil como ***LMM***, existen ya correspondencias de votación Condorcet inmunes a la manipulación mediante abstención.

Definición 3.17(Correspondencia f_{RSTC})

Llamemos f_{RSTC} a la correspondencia de votación que elige, para toda situación (X, p):

a) El conjunto W de candidatos débiles de Condorcet, si W es no vacío.
b) El conjunto de candidatos perteneciendo al conjunto de Smith S, si W es vacío.

La razón de denotarla de esta manera es que f_{RSTC} es un refinamiento de la correspondencia de votación f_{STC} (Schwartz Top Cycle)[6], y coincide con ella cuando la situación (X, p) puede expresarse en forma de torneo (para todo $x, y, x \neq y$ implica $p(x, y) \neq p(y, x)$).

Proposición 3.14

La correspondencia de votación Condorcet $\boldsymbol{f_{RSTC}}$ es ***LMM-A-Inmune*** (inmune a la ***LMM-A-manipulación***), pero no es ***TVBU-A-Inmune***.

Demostración***:***

[6] $f_{STC}(X, p) = \{x \in X$: no existe un $y \in X$ tal que y venza indirectamente a x y x no venza indirectamente a $y\}$

Sea (X, p) cualquier situación, y v cualquier votante en esta situación cuyas preferencias se representan por un orden lineal P: $x_1 > x_2 >\ldots> x_n$. Sea $Y = f_{RSTC}$ (X, p) el conjunto de ganadores cuando v vota, y $Z = f_{RSTC}$ (X, p-v) el conjunto de ganadores si v se abstiene. Supongamos que $Y \neq Z$.

Para demostrar la Proposición 3.14 es necesario recurrir al siguiente lema:

Lema 3.3

Si $z\in Z$-Y, entonces todo candidato $y\in Y$ donde zPy satisface $y\in Z$.

Demostración*:*

Supongamos que zPy, $z\in Z$-Y e $y\in Y$. Dado que $y\in Y$ y $z\notin Y$, podemos deducir que y es un candidato débil de Condorcet en (X, p) mientras que z no lo es, o y pertenece a el conjunto de Smith de (X, p) mientras que z no. En cualquier caso, esto implica que y vence o empata con z en (X, p), y esto supone que, dado que zPy, que y vence a z en (X, p-v). Dado que $z\in Z$ es vencido por y, Z debe ser el conjunto de Smith de f (X, p-v). Así pues, $y\in Z$. □

Asumamos a continuación que $\text{Max}_P\ Z \geq \text{Max}_P\ Y$, pues en otro caso, si $\text{Max}_P\ Z < \text{Max}_P\ Y$ entonces Y *LexiMax* Z, lo que implica que $Z\ LMM_P\ Y$ no se sostiene.

A partir de este punto, distingamos los siguientes dos casos:

Caso 1: Supongamos que $\text{Max}_P\ Y = \text{Max}_P\ Z$.

Sea $Y = \{y_1,\ y_2,\ldots,\ y_k\}$, donde $y_1Py_2P\ldots Py_k$, y $Z = \{z_1,\ z_2,\ldots,\ z_h\}$, donde $z_1Pz_2P\ldots Pz_h$. Para que $Z\ LMM_P\ Y$ se cumpla, es necesario que $Z\ LexiMax_P\ Y$, lo cual implica las dos siguientes posibilidades: 1) $h < k$ y $z_1=y_1$, $z_2 =y_2,\ldots,$ $z_h=y_h$. En este caso, para todo $z\in Z$ e $y\in Y$-Z, zPy y z vence a y en (X, p-v), lo que implica que para todo $z\in Z$ e $y\in Y$-Z, z vence o empata con y en (X, p), lo que contradice el hecho de que Y es el conjunto de Smith de (X, p) o el conjunto no vacío de los candidatos débiles de Condorcet para (X, p). 2) Existe un s tal que $1 \leq s < h$, $z_1=y_1$, $z_2 =y_2,\ldots,$ $z_s = y_s$ y $z_{s+1}Py_{s+1}$. En este caso, dado que $z_{s+1}\in Z$-Y y $z_{s+1}Py_j$ para todo j tal que $s+1 \leq j \leq k$, el lema 2 implica $y_j \in Z$ para todos esos j, lo que a su vez implica que $Y \subset Z$. Paro entonces probaremos que $Y\ LexiMin_P\ Z$. De hecho, sea $z^* = \text{Min}_P\ Z$-Y, y renombremos Y

y Z de abajo arriba del siguiente modo: $Y = \{y'_1,\ y'_2, \ldots, y'_k\}$, donde $y'_k P y'_{k-1} P \ldots P y'_1$, y $Z = \{z'_1,\ z'_2, \ldots, z'_h\}$, donde $z'_h P z'_{h-1} P \ldots P z'_1$. Es fácil ver que para algún r tal que $0 \leq r < k$-1, $y'_1 = z'_1, y'_2 = z'_2, \ldots, y'_r = z'_r$ e $y'_{r+1} P z'_{r+1}$, donde $z'_{r+1} = z^*$. Por tanto, Z LMM_P Y no se sostiene.

Caso 2: Supongamos que $\mathrm{Max}_P\ Z\ P\ \mathrm{Max}_P\ Y$.

Esto implica, por el lema 2, que todo elemento $y \in Y$ pertenece a Z. Consideremos dos posibilidades: 1) Existe un $z \in Z\text{-}Y$ tal que $\mathrm{Max}_P\ Y\ P\ z$. En esta situación, es fácil ver, como en el caso 1 anterior, que Y *LexiMin* Z. 2) No existe $z \in Z\text{-}Y$ tal que $\mathrm{Max}_P\ Y\ P\ z$. En esta situación, los únicos elementos en Z-Y son aquéllos preferidos por el votante v a $\mathrm{Max}_P\ Y$. Pero esta segunda situación es imposible. De hecho, dado que $Z\text{-}Y = \{z \in Z \mid z\ P\ \mathrm{Max}_P\ Y\}$ y que todo elemento de Y vence o empata con todo elemento de Z-Y in (X, p), es necesario que todo elemento de Y venza a todo elemento de Z-Y en $(X, p\text{-}v)$, y esto implica que $f^*(X, p\text{-}v)$ es Y, no Z. Por tanto, Z LMM_P Y no se mantiene. Así pues, deducimos que f_{RSTC} *es* ***LMM****-A-inmune*.

Para demostrar que f_{RSTC} no es ***TVBU****-A-Inmune*, usaremos el siguiente contraejemplo:

Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, y sea p el siguiente perfil con 24 votantes:

$x_3 > x_2 > x_1 > x_4 > x_6 > x_5$ (1votante),

$x_2 > x_3 > x_5 > x_6 > x_4 > x_1$ (2 votantes),

$x_3 > x_5 > x_1 > x_6 > x_2 > x_4$ (2 votantes),

$x_4 > x_6 > x_5 > x_1 > x_2 > x_3$ (3 votantes),

$x_5 > x_1 > x_6 > x_3 > x_2 > x_4$ (3 votantes),

$x_6 > x_5 > x_1 > x_3 > x_4 > x_2$ (1 votante),

$x_1 > x_6 > x_3 > x_5 > x_2 > x_4$ (1 votante),

$x_5 > x_3 > x_4 > x_6 > x_2 > x_1$ (1 votante),

$x_4 > x_2 > x_3 > x_6 > x_1 > x_5$ (2 votantes),

$x_5 > x_2 > x_3 > x_4 > x_1 > x_6$ (3 votantes),

$x_1 > x_3 > x_2 > x_6 > x_5 > x_4$ (1 votante),

$x_6 > x_1 > x_2 > x_4 > x_5 > x_3$ (1 votante),

$x_6 > x_1 > x_4 > x_3 > x_2 > x_5$ (1 votante),

$x_6 > x_1 > x_4 > x_5 > x_3 > x_2$ (1 votante),

$x_3 > x_4 > x_1 > x_2 > x_6 > x_5$ (1 votante)

La matriz de comparaciones, M_p, es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		15	12	12	9	12
x_2	9		11	14	9	10
x_3	12	13		16	11	13
x_4	12	10	8		10	11
x_5	15	15	13	14		11
x_6	12	14	11	13	13	

Es evidente que en p no hay candidatos Condorcet débiles. Veamos cual es el conjunto de Smith S. Si $x_1 \in S$, ello implica $x_3 \in S$, $x_4 \in S$, $x_5 \in S$ y $x_6 \in S$, y de $x_4 \in S$ se implica $x_2 \in S$, de donde se deduce $S = X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Por otra parte, si $x_1 \notin S$, ello implica $x_2 \notin S$, $x_3 \notin S$, $x_4 \notin S$ y $x_6 \notin S$, y de $x_6 \notin S$ se implica $x_5 \notin S$, de donde también se deduce que el conjunto de Smith es $S = X$. Por tanto, $f_{RSTC}(p) = X$. Si añadimos un votante v del tipo $x_4 > x_2 > x_3 > x_6 > x_1 > x_5$, obtenemos la siguiente matriz de comparaciones M_{p+v}:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		15	12	12	10	12
x_2	10		12	14	10	11
x_3	13	13		16	12	14
x_4	13	11	9		11	12
x_5	15	15	13	14		11
x_6	13	14	11	13	14	

Ahora, en p+v no hay candidatos Condorcet débiles y el conjunto de Smith es $S = \{x_3, x_5, x_6\}$, ya que cada uno de esos tres candidatos vence a cada uno de los otros tres, y entre estos últimos se produce un ciclo x_1 vence a x_2, x_2 vence a x_4 y x_4 vence a x_1. Por tanto, $f_{RSTC}(p+v) = \{x_3, x_5, x_6\}$.

Veamos que $f_{RSTC}(p)$ ***TVBU*$_P$** $f_{RSTC}(p+v)$ para el orden de preferencias del votante v: $x_4>x_2>x_3>x_6>x_1>x_5$. Dada una función cualquiera de utilidad U consistente con v, $U(f_{RSTC}(p)) = U(x_1)/6 + \ldots + U(x_6)/6 = [U(x_4)/6 + U(x_3)/6] + [U(x_2)/6 + U(x_6)/6] + [U(x_1)/6 + U(x_5)/6] > [U(x_3)/6 + U(x_3)/6] + [U(x_6)/6 + U(x_6)/6] + [U(x_5)/6 + U(x_5)/6] = U(x_3)/3 + U(x_6)/3+U(x_5)/3 = U(f_{RSTC}(p+v))$. Así pues, f_{RSTC} no es ***TVBU****-A-Inmune*. □

Partiendo de este resultado, la pregunta siguiente sería, ¿hay alguna correspondencia de votación Condorcet que sea ***TVBU****-A-Inmune* o, lo que es lo mismo, que cumpla ***P-TVBU***. Esta y otras cuestiones adicionales se tratarán de forma más profunda en el capítulo siguiente.

En este punto, es de destacar que, puesto que el problema de extender el resultado de Moulin al contexto de las correspondencias de votación está relacionado con el de extender el teorema de Gibbard-Satterthwaite, uno podría intentar comparar los resultados aquí expuestos con aquellos que han sido recientemente obtenidos, en el contexto convencional de la manipulación. Algunos de esos resultados, entre ellos los de Duggan and Schwartz (2000) y Barberá *et al* (2001), se recogen de forma más detallada en la Sección 2.7 del Capítulo anterior.

Las extensiones correspondientes, por un lado, al teorema de Moulin y, por otro, al teorema de Gibbard-Satterthwaite, son resultados de imposibilidad con la misma estructura: todo elemento de una familia de correspondencias de votación es manipulable en el sentido de un determinado orden. Sin embargo, existen tres diferencias importantes entre ellas:

1) Las extensiones de Moulin se refieren a un tipo especial de correspondencias de votación (las Condorcet), mientras que las segundas son sobre correspondencias de votación más generales.

2) Las extensiones de Moulin sólo usan la abstención como un modo de manipulación en lugar de utilizar cualquier papeleta con unas preferencias no sinceras.

3) Los teoremas de extensión de Gibbard-Satterthwaite usualmente utilizan el supuesto de que para todo número específico de votantes y candidatos existe una situación el la que tiene lugar la manipulación, mientras que en los teoremas de extensión de Moulin (como la Proposición 4.9) es únicamente necesario que tal situación exista sin necesidad de un número específico de votantes o candidatos.

Por lo tanto, no es posible hacer una comparación formal (en el sentido de implicación) entre los resultados de estas dos líneas de investigación. Sin embargo, sería destacable intentar expresar, en nuestra terminología, las principales extensiones del teorema de Gibbard-Satterthwaite.

Por ejemplo, siguiendo la terminología de este capítulo y asumiendo tres o más candidatos, el teorema principal de Duggan y Schwartz (2000) se puede formular del siguiente modo: Si una correspondencia de votación satisface la propiedad de *Soberanía del votante* (todo candidato es un ganador en al menos una situación), *No-Dictadura* y *Resolutividad Residual* (para algunas clases especiales de situación existe un conjunto unitario de ganadores), entonces es *Opt*-manipulable y *Pes*-manipulable.

Del mismo modo y, por su parte, Barberá *et al* (2001) establecían que si una correspondencia de votación satisface *Unanimidad* y *No-Dictadura*, entonces era *AVBU*-manipulable; y si satisfacía *Unanimidad*, *No-Dictadura* y *No-Bi-dictadura* (existe un par de votantes tales que para toda situación todo candidato ganador es el favorito o uno de ellos), entonces era *AVB*-manipulable.

El resultado en la Proposición 3.13 tiene un consecuente que es similar pero más fuerte en cierto modo que el de Duggan y Schwartz (2000), sin embargo el antecedente es más débil que el suyo, porque las correspondencia de votación Condorcet son un caso especial de las correspondencia de votación que ellos consideran (excepto para el caso muy especial de dos votantes). Por tanto no existe una relación de implicación entre dichos resultados y los suyos.

Por la Proposición 2.2 del capítulo anterior reflejada en la Figura 3.8, que establece que los órdenes *Opt* y *Pes* son más fuertes que el orden *AVBU*, un comentario similar de comparación podría hacerse entre el resultado de la Proposición 3.13 y el de Barberá et al (2001).

3.4. Conclusiones y comentarios adicionales.

A lo largo de este capítulo se ha puesto de manifiesto que, a la hora de realizar cualquier aproximación axiomática o positiva al análisis de los distintos métodos de votación, la propiedad de Participación es importante, pues su cumplimiento pone de manifiesto la idea intuitiva de que todo procedimiento de elección debería incentivar el voto y, por tanto, si esta propiedad se cumple, no debería darse el caso de que ir a votar supusiera un resultado de la elección que fuera menos preferido, desde el punto de vista del votante, que el que se obtendría si ese mismo votante decidiese abstenerse.

Por otro lado, inicialmente y en el contexto de las funciones de votación o métodos de votación resolutivos, esta propiedad de Participación ofrece un punto a favor de los métodos Posicionales frente a los métodos Condorcet pues, en Moulin (1988a) se indica ya, algo bien sabido en la literatura, que todos los métodos Posicionales cumplen esta propiedad mientras que, por otro lado, el teorema de imposibilidad en ese mismo artículo prueba que todas las funciones de votación Condorcet incumplen la propiedad de Participación.

Pues bien, partiendo de estos resultados iniciales, cuando desplazamos el análisis al contexto de las correspondencias de votación, lo primero a tener en cuenta es que los conjuntos de candidatos ganadores dejan de ser unitarios y, puesto que la comprobación de la exigencia de la Participación hace necesario la comparación de los resultados ante la decisión del votante de votar o quedarse en casa, a la hora se establecer el posible perjuicio para el votante han de extenderse, al menos parcialmente, las ordenaciones de preferencias de los votantes sobre los candidatos individuales a subconjuntos de candidatos ganadores.

Con ese objetivo, en la Sección 3.3 se presentan las principales propiedades de Participación en el contexto de las correspondencias de votación definidas bien directamente, sin hacer uso específico de ningún orden de preferencias entre subconjuntos (Subsección 3.3.1), bien en base a un orden específico de extensión de las preferencias individuales a subconjuntos de candidatos, haciendo uso específico de la investigación y los resultados obtenidos en este sentido en el Capítulo 2 (Subsección 3.3.3). En este mismo sentido, la Proposición 3.3, Proposición 3.4, Proposición 3.5, Proposición 3.6, Proposición 3.7 y Proposición 3.8 contienen las principales implicaciones entre todas las propiedades de Participación anteriormente definidas y que finalmente aparecen englobadas en la Figura 3.14.

A continuación, y ya centrados en el objetivo concreto de intentar extender a este nuevo contexto de correspondencias de votación el resultado de imposibilidad de Moulin sobre funciones de votación Condorcet, se presentan, en primer lugar, los principales resultados conocidos (todas ellas incumplen CV-Participación Proposición 3.9) y Participación Optimista y Pesimista (Proposición 3.12) (Subsección 3.3.4), para pasar luego a una aproximación a la Paradoja de la Abstención centrada en el punto de vista de los votantes que, ante la decisión de votar, pueden manipular el resultado de la elección en su beneficio decidiendo abstenerse (Subsección 3.3.5). En este contexto es donde mi investigación ha sido más fructífera, y así aparece reflejado en los resultados contenidos en la Proposición 3.13 y Proposición 3.14.

El primero, Proposición 3.13, *un resultado de imposibilidad, establece que ninguna correspondencia de votación Condorcet es Opt-A-Inmune o Pes-A-inmune*, es decir, para toda correspondencia de votación Condorcet existen situaciones en las que todo votante optimista o pesimista con determinadas preferencias podría manipular la elección a su favor absteniéndose.

Con la ayuda de las conexiones lógicas de la Figura 3.8 y Figura 3.9, podemos dibujar conclusiones adicionales de la Proposición 3.13. En particular, *que el orden Opt (o Pes) implica AVBU y AVB y, por lo tanto, también podemos decir que ninguna correspondencia de votación Condorcet es AVBU-A-Inmune ni AVB-A-Inmune.*

El segundo, Proposición 3.14*, un resultado de posibilidad, establece que la correspondencia de votación Condorcet* f_{RSTC} *es LMM-A-inmune y, por tanto, está libre de la Paradoja de la Abstención desde el punto de vista de los votantes cuyo conjunto de preferencias está de acuerdo con el orden LMM.* De nuevo, *con la ayuda de las conexiones lógicas de la* Figura 3.8 *y* Figura 3.9*, podemos establecer a través de* f_{RSTC} *los límites de la paradoja para diferentes órdenes de extensión.* En particular, *está claro que* f_{RSTC} *es también E-A-Inmune para todo orden de extensión tal que E implica LMM (por ejemplo, DF, DD y TVB).*

Como comentario adicional señalar que, si bien toda la investigación contenida en este capítulo está restringida al contexto de órdenes lineales, una posible línea de investigación futura sería extender estos resultados de *manipulación mediante abstención* al caso de órdenes de preferencias en las que la indeferencia se permite. En este nuevo contexto, existen algunas contribuciones para la literatura de la manipulación que son de interés especial para mi problema. Por ejemplo, Gärdenfors (1976) establece que si una correspondencia de votación Condorcet *f* es Anónima y Neutral, entonces es manipulable en el sentido del orden *CDD** (una versión, para el contexto no lineal, del orden *CDD* definido en el Capítulo 2). Este resultado, a diferencia de los de Duggan and Schwartz (2000) y Barberá *et al* (2001) ya comentados en la Sección 3.3.6, permiten una comparación formal con los ya presentados aquí, por implicación, porque ahora el antecedente es el mismo (en referencia a las correspondencias de votación Condorcet), mientras que el consecuente sería más fuerte para el caso particular de manipulación mediante la abstención.

CAPÍTULO 4. OTRAS EXTENSIONES DE PARTICIPACIÓN

4.1. Introducción.

A partir de la jerarquía lógica establecida entre las distintas propiedades de Participación del Capítulo 3, que ha permitido comprender de un modo amplio la extensión el Teorema de Moulin para el caso de las correspondencias de votación Condorcet, vamos a profundizar aún más con el objetivo de desarrollar algunas cuestiones que complementan y, en gran medida, cierran las tareas allí desarrolladas.

Así, en la Sección 4.2 nos ocuparemos de dos cuestiones principales. La primera, averiguar si, dado el árbol de propiedades de Participación de la Figura 3.14, queda abierto a la investigación algún problema del que pueda obtenerse, en relación a las correspondencias de votación Condorcet, bien un resultado de imposibilidad que extienda aún más los resultados ya estudiados, bien un resultado de posibilidad que los acote. La segunda, explorar la incidencia, de un modo no exhaustivo, tanto en la propia familia de las correspondencias de votación Condorcet, como en la familia de las correspondencias de votación Posicionales, del cumplimiento e incumplimiento de las distintas propiedades de Participación analizadas.

En las Secciones 4.3 y 4.4, y continuando con la misma tarea de extender los resultados del Capítulo 3, se establecen dos nuevas línea de análisis: La primera, relacionada con la extensión de los resultados obtenidos a *k*-funciones y *k*-correspondencias de votación Condorcet (funciones y correspondencias de votación Condorcet que tengan un número específico de *k* de ganadores o de *k* conjuntos de ganadores). Y, la segunda, relacionada con la aproximación a la Paradoja de la Abstención desde el punto de vista del candidato y, más en concreto, con su relación con la propiedad de Consistencia Externa de Young y la posibilidad de extender el Teorema de Young y Levenglick (1978) sobre el incumplimiento de dicha propiedad por parte de todas las correspondencias de votación Condorcet.

Por último, en la Sección 4.5 se presentan las principales conclusiones y algunos comentarios adicionales.

4.2. Exploración del cumplimiento de las propiedades de Participación en Correspondencias de Votación.

En esta sección se intenta averiguar si, en relación a las propiedades de Participación, es posible obtener nuevos resultados de imposibilidad que extiendan los resultados ya conocidos (incluyendo los obtenidos en el Capítulo 3), o bien algún resultado de posibilidad para algún orden de extensión de preferencias entre conjuntos.

Con este propósito, la siguiente proposición resume brevemente los principales resultados disponibles referentes a correspondencias de votación Condorcet.

Proposición 4.1

a) Todas las correspondencias de votación Condorcet incumplen ***POpt*** (Jimeno, 2003 y Jimeno, Pérez y García, 2008).
b) Todas las correspondencias de votación Condorcet invariantes a traslaciones incumplen ***PPes*** (Jimeno, 2003 y Jimeno, Pérez y García, 2008).
c) Todas las correspondencias de votación Condorcet incumplen ***PCV*** (Pérez, 1995).
d) Black y Copeland incumplen ***PPos*** y ***PNeg*** (Pérez, 2001).
e) MaxMin cumple ***PPos*** y ***PNeg*** (Pérez, 2001).
f) La correspondencia de votación Condorcet llamada Refinamiento de Schwartz Top Cycle (f_{RSTC}) cumple ***P-LMM***, pero no ***P-TVBU*** (Proposición 3.14).

4.2.1. Nuevos resultados de posibilidad.

Como podemos observar, los resultados de imposibilidad contenidos en los apartados a) a d) de la Proposición 4.1 afectan a las propiedades *PCV*, *POpt* y *PPes* y, por lo tanto, atendiendo a las implicaciones contenidas en la Figura 3.14 del Capítulo 3, es evidente que afectarán también a todas aquellas propiedades que las implican lógicamente (más fuertes que éstas). Es decir, podemos concluir ya, que *ninguna correspondencia de votación Condorcet cumple ni PoptSem*, *ni P-AVBU*, *ni* (supuesto que sea *Invariante ante Traslaciones*) *PPesFuer*, entre otras propiedades.

Por otra parte, puesto que los resultados de posibilidad (apartado (e) y primera parte del (f) de la Proposición 4.1) afectan a las propiedades *P-LMM*, *PPos* y *PNeg*, es evidente que afectarán también a todas las propiedades implicadas por éstas (más débiles que éstas), como *P-OptyPes* y *P-DF*. En consecuencia, *existen correspondencias de votación Condorcet que cumplen P-OptyPes, y otras que cumplen P-TVB, P-DD y P-DF.*

Al intentar extender los resultados de imposibilidad obtenidos o encontrar otros nuevos, habrá que centrar la atención en las propiedades más débiles que *PCV*, *POpt* y *PPes*, o en propiedades independientes de las tres, si bien con *PPos* y *PNeg* esto no será posible, ya que sabemos que algunas correspondencias de votación las cumplen (como, por ejemplo, MaxMin). Nos conviene (y el porqué quedará claro más adelante), concentrarnos en las dos propiedades siguientes (ambas independientes de *PCV*, *POpt* y *PPes*): *PPosEs* y *P-TVBU*.

Las preguntas que nos planteamos son: ¿existe alguna correspondencia de votación Condorcet que cumpla *PPosEs*?, ¿existe alguna correspondencia de votación Condorcet que cumpla *P-TVBU*?

La siguiente proposición responde de manera positiva a ambas preguntas:

Proposición 4.2

a) La correspondencia de votación **MaxMin Lexicográfica** ($f_{MAXMINLEX}$) cumple la propiedad ***PPosEs***.

b) La correspondencia de votación Condorcet **Elige-Todos** ($f_{E\text{-}T}$), cumple la propiedad ***P-TVBU***.

Demostración:

a) Sea una situación cualquiera (X, p), y sea $q_p(x)$ el vector de los términos no diagonales de la fila x en la matriz de comparaciones M_p, listado en orden no decreciente. Supongamos que $x \in f_{MMLEX}(X, p)$. Eso significa que para todo $y \in X\text{-}\{x\}$, el vector $q_p(x)$ es lexicográficamente superior o igual al vector $q_p(y)$. Si ahora añadimos un votante v cuyo favorito es x, el vector $q_{p+v}(x)$ se obtiene añadiendo una unidad a cada una de las componentes de $q_p(x)$, mientras que para todo $y \in X\text{-}\{x\}$, el vector $q_{p+v}(y)$ se obtiene añadiendo una unidad a algunas de sus componentes, pero no a todas (por ejemplo, la componente de su comparación con x no aumenta). Es evidente, en consecuencia, que $q_{p+v}(x)$ es lexicográficamente superior estrictamente a $q_{p+v}(y)$, lo que implica que $f_{MAXMINLEX}(X, p+v) = \{x\}$. Por tanto, $\boldsymbol{f_{MAXMINLEX}}$ cumple ***PPosEs.***

b) Dada una situación cualquiera (X, p), sea v un nuevo posible votante. Sea x su candidato favorito y sea z su antifavorito. Consideremos dos posibilidades: b1) En esta primera posibilidad, existe en (X, p) un candidato de Condorcet c. Entonces, o bien c seguiría siendo candidato Condorcet en $(X, p+v)$, lo que implicaría $f_{E\text{-}T}(X, p) = f_{E\text{-}T}(X, p+v)$, o bien dejaría de serlo, lo que implicaría $f_{E\text{-}T}(X, p) = \{c\} \neq \{x\}$ y $f_{E\text{-}T}(X, p+v) = X$. En ambos casos, es falso que $f_{E\text{-}T}(X, p)$ *TVBU* $f_{E\text{-}T}(X, p+v)$. b2) En esta segunda posibilidad, no existe en (X, p) candidato de Condorcet. Entonces, o bien seguiría sin haber candidato Condorcet en $(X, p+v)$, lo que implicaría $f_{E\text{-}T}(X, p) = f_{E\text{-}T}(X, p+v)$, o bien sí habría un tal candidato Condorcet c en $(X, p+v)$, lo que implicaría $f_{E\text{-}T}(X, p) = X$ y $f_{E\text{-}T}(X, p+v) = \{c\} \neq \{z\}$. En ambos casos, es falso que $f_{E\text{-}T}(X, p)$ *TVBU* $f_{E\text{-}T}(X, p+v)$. En consecuencia, no existe (X, p) y v tales que $f_{E\text{-}T}(X, p)$ *TVBU* $f_{E\text{-}T}(X, p+v)$. Por tanto, $\boldsymbol{f_{E\text{-}T}}$ cumple ***P-TVBU.*** □

Podemos concluir así, que no existen otros resultados de imposibilidad para correspondencias de votación Condorcet, referentes a las propiedades de Participación, que los ya conocidos (que afectan a las propiedades *PCV*, *POpt* y *PPes*) y los que se deducen de ellos de manera obvia (por implicar de manera directa a estas tres propiedades y, por tanto, ser más fuertes), que afectarán a *PPesFuer*, *POptSem*, *POptCua*, *P-AVBU*, *P-AVB* y *PoptEs*. Resumiendo, ***no existe ningún nuevo resultado de imposibilidad***.

En cuanto a los resultados de posibilidad, y en vista de lo dicho anteriormente, las preguntas a responder son: ¿existe alguna correspondencia de votación Condorcet que cumpla *PPosSem*, *PPosCua* o *PPosEs*?, ¿existe alguna correspondencia de votación Condorcet que cumpla *P-TVBU*?

Precisamente la Proposición 4.2 ya ha respondido a estas preguntas. Por tanto, podemos decir que el análisis de imposibilidad-posibilidad, referente a las propiedades de Participación de la Figura 3.14 y a los métodos Condorcet, ha sido completado.

A efectos de visualización, en la Figura 4.1 se vuelve a representar la cadena de implicaciones lógicas de las propiedades de Participación, pero rodeando mediante una elipse las propiedades de Participación “Condorcet-imposibles” y mediante un rectángulo las “Condorcet-posibles”, indicando, en este último caso, alguna correspondencia de votación Condorcet que la cumpla.

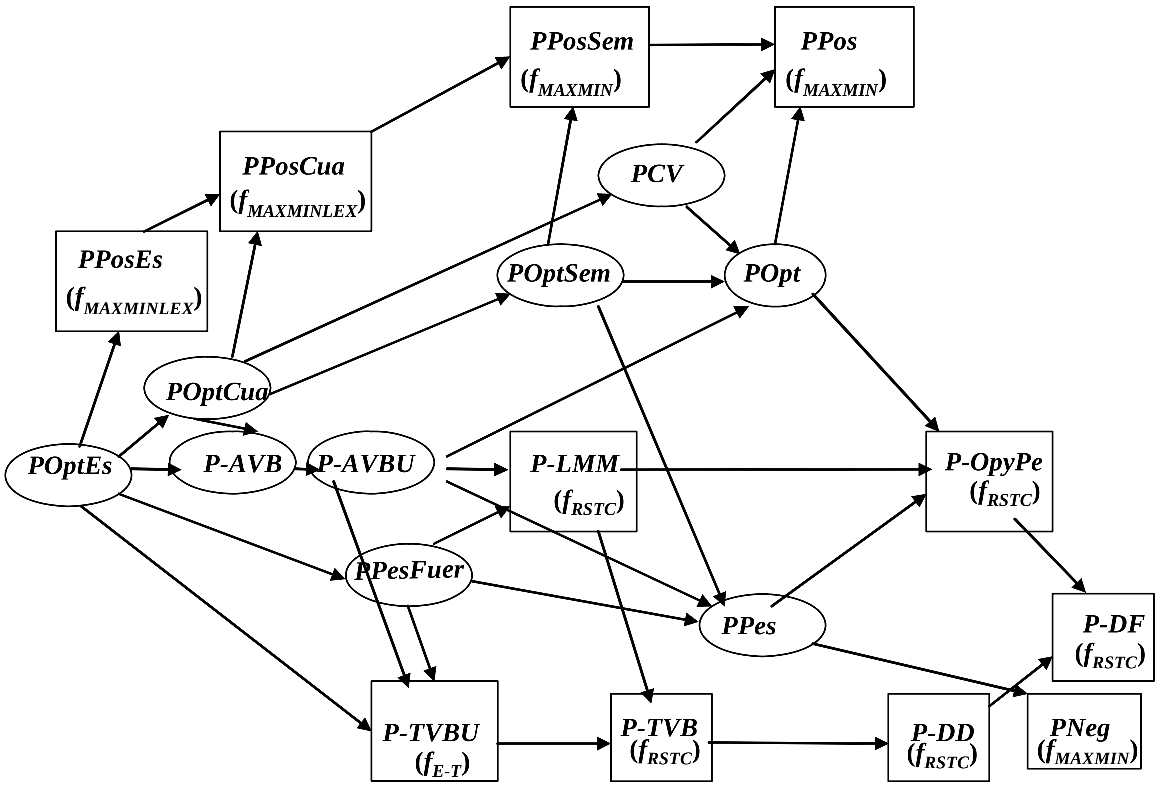


Figura 4.1 Resultados de Imposibilidad y de Posibilidad

4.2.2. Otros resultados en Correspondencias de Votación conocidas.

Para completar en cierta forma el análisis de posibilidad-imposibilidad de las propiedades de Participación en correspondencia de votación Condorcet de la sección anterior, vamos a explorar la incidencia, tanto en las propias correspondencias Condorcet, como en alguna de las más importantes correspondencias Posicionales, del cumplimiento e incumplimiento de las propiedades de Participación de la Figura 4.1.

No pretendemos realizar una exploración exhaustiva, sino sólo ilustrativa, por lo que seleccionaremos sólo algunas correspondencias de votación más representativas de cada familia. Así, por lo que se refiere a las correspondencias de votación Condorcet, estudiaremos una correspondencia de tipo C1, Copeland, y dos de tipo C2, Black y MaxMin y, del mismo modo, en cuanto a las correspondencias de votación Posicionales, nos referiremos únicamente a algunos de sus métodos más significativos: Borda, Pluralidad y Antipluralidad.

Correspondencias de Votación Condorcet

En relación a las correspondencias de votación Condorcet seleccionadas podemos establecer la siguiente proposición:

Proposición 4.3

a) La correspondencia de votación **MaxMin** (f_{MAXMIN}) cumple ***PPosSem***, pero incumple ***PPosCua***.
b) Las correspondencias de votación **MaxMin**, **Copeland** ($f_{COPELAND}$) y **Black** (f_{BLACK}) incumplen ***P-DF***.

Demostración:

a) Sea una situación cualquiera (X, p), y sea $\mathrm{q}_p(x)$ el vector de los términos no diagonales de la fila x en la matriz de comparaciones M_p. Supongamos que $x \in f_{MAXMIN}(X, p)$ y que $z \notin f_{MAXMIN}(X, p)$. Eso significa que la componente mínima del vector $\mathrm{q}_p(x)$ es estrictamente superior a la componente mínima del vector $q_p(z)$. Si se añade un conjunto unánime v de votantes que tienen a x como favorito, la componente mínima del vector $q_{p+v}(x)$ seguirá siendo estrictamente superior a la componente mínima del vector $q_{p+v}(z)$, ya que la primera ha aumentado en una cantidad igual al número de votantes de v, mientras que la segunda o bien ha aumentado en esa misma cantidad o no ha variado. En consecuencia, $x \in f_{MAXMIN}(X, p+v)$ y $z \notin f_{MAXMIN}(X, p+v)$, de donde se deduce que MaxMin cumple *PPosSem*. Para demostrar que no cumple *PPosCua*, considérese la situación en que $X = \{x, y, z, u, t\}$ y p es el perfil siguiente con 15 votantes:

4 votantes: $u > z > t > y > x$
3 votantes: $x > z > t > y > u$
2 votantes: $y > u > x > t > z$
2 votantes: $x > y > u > t > z$
1 votante: $y > u > z > x > t$
1 votante: $t > z > y > x > u$
1 votante: $t > z > u > y > x$
1 votante: $x > y > t > z > u$

La matriz de comparaciones es M_p:

	x	y	z	u	t
x		6	8	7	9
y	9		6	10	6
z	7	9		6	8
u	8	5	9		9
t	6	9	7	6	

Es evidente que $f_{MAXMIN}(X, p) = \{x, y, z, t\}$. Si añadimos un votante v del tipo $x > t > y > z > u$, la nueva matriz de comparaciones es M_{p+v}:

	x	y	z	u	t
x		7	9	8	10
y	9		7	11	6
z	7	9		7	8
u	8	5	9		9
t	6	10	8	7	

Ahora es claro que $f_{MAXMIN}(X, p+v) = \{x, z\}$. Como t era elegido antes y preferido a z por el votante v, y sin embargo no ha sido elegido ahora, **f_{MAXMIN} incumple *PPosCua***.

b) Para demostrar que f_{MAXMIN} y f_{BLACK} incumplen *P-DF*, considérese la situación en que $X = \{a, b, c, d\}$ y p es el perfil siguiente con 16 votantes:

5 votantes: $a > d > b > c$

3 votantes: $d > b > c > a$

3 votantes: $b > c > a > d$

2 votantes: $d > c > a > b$

1 votante: $c > a > d > b$

1 votante: $b > a > d > c$

1 votante: $c > b > a > d$

La matriz de comparaciones es M_p:

	a	b	c	d
a		8	6	11
b	8		12	5
c	10	4		5
d	5	11	11	

Donde el único elegido por f_{MAXMIN} es a, con mínimo de su fila igual a 6. Si añadimos 2 votantes con preferencias: $c> a> b> d$, la nueva matriz de comparaciones es M_{p+v}:

	a	*b*	*c*	*d*
a		10	6	13
b	8		12	7
c	12	6		7
d	5	11	11	

donde el único elegido es b, con mínimo de su fila igual a 7.

Puesto que $\{a\}=f_{MAXMIN}(X, p)\ DF_v\ f_{MAXMIN}(X, p+v)=\{b\}$, $\boldsymbol{f_{MAXMIN}}$ **incumple *P-DF*.**

Por otra parte, el único elegido por f_{BLACK} es d, con cuenta de Borda igual a 27. Si añadimos un conjunto v de 5 votantes del tipo $d > a > b > c$, la nueva matriz de comparaciones es M_{p+v}:

	a	*b*	*c*	*d*
a		13	11	11
b	8		17	5
c	10	4		5
d	10	16	16	

donde el único elegido es a por ser candidato de Condorcet.

Puesto que $\{d\} = f_{BLACK}(X, p)\ DF_v\ f_{BLACK}(X, p+v) = \{a\}$, $\boldsymbol{f_{BLACK}}$ **incumple *P-DF***.

Para demostrar que $f_{COPELAND}$ no cumple *P-DF*, considérese la situación en que $X = \{x, y, z, u, t\}$ y p es el perfil siguiente con 15 votantes:

3 votantes: $u > z > t > y > x$

3 votantes: $x > z > t > y > u$

2 votantes: $y > u > x > t > z$

2 votantes: $y > x > u > t > z$

1 votante: $y > u > z > t > x$

1 votante: $t > z > y > x > u$

1 votante: $t > z > u > y > x$

1 votante: $x > y > z > t > u$

1 votante: $y > u > z > t > x$

La matriz de comparaciones es M_p:

	x	*y*	*z*	*u*	*t*
x		4	8	7	8
y	11		7	11	7
z	7	8		6	9
u	8	4	9		9
t	7	8	6	6	

El único elegido es u, con 3 victorias. Si añadimos 2 votantes con preferencias: $t > x > u > y > z$, la nueva matriz de comparaciones es M_{p+v}:

	x	y	z	u	t
x		6	10	9	8
y	11		9	11	7
z	7	8		6	9
u	8	6	11		9
t	9	10	8	8	

El único elegido es ahora y, con 3 victorias. Puesto que $\{u\}$ = $\boldsymbol{f_{COPELAND}}(X, p)$ DF_v $f_{COPELAND}(X, p+v) = \{y\}$, se **incumple *P-DF***. □

Correspondencias de Votación Posicionales

Respecto a las correspondencias de votación posicionales, la siguiente proposición resume los principales resultados de posibilidad ya conocidos en relación a las propiedades de Participación.

Proposición 4.4

a) Todas las correspondencias de votación Posicionales cumplen las propiedades ***PPos*** y ***PNeg***.
b) Todas las correspondencias de votación Posicionales cumplen las propiedades ***POpt***, ***PPes***. (Jimeno, 2003)

Para completar este análisis de las propiedades de Participación podemos establecer la siguiente proposición:

Proposición 4.5

a) Todas las correspondencias de votación Posicionales propias (entre las que encontramos el método de Borda) cumplen ***POptEs***.
b) Todas las correspondencias de votación posicionales cumplen ***POptCua***.
c) **Pluralidad** ($f_{PLURALIDAD}$) cumple ***PPosEs***, pero incumple ***PPesFuer***.
d) **Antipluralidad** ($f_{ANTIPLURALIDAD}$) incumple ***PPosEs*** y ***PPesFuer***.

a) Sea f una correspondencia de votación posicional propia cualquiera, obtenida a partir del vector de puntuaciones ($s_0, s_1,\ldots, s_{n-1}$) donde $s_0 < s_1 <\ldots < s_{n-1}$. Considérese una situación cualquiera (X, p) en la que $X = \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$. Llamemos $c_{f,p}(x_i)$ a la cuenta correspondiente a dicha correspondencia de votación para el candidato x_i en la situación (X, p), es decir, $c_{f,p}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} s_{n-j} r(x_i, j)$.

Supongamos, sin perder generalidad, que añadimos un conjunto unánime v de h votantes del tipo $x_1 > x_2 >\ldots> x_{n-1} > x_n$. Si $x_i \in f(X, p)$ (lo que implica que $c_{f,p}(x_i)\geq c_{f,p}(x_j)$ para todo j), cualquier candidato x_j menos preferido que x_i para los votantes de v (es decir, con $j > i$) tendrá en $p+v$ una cuenta $c_{f,p+v}(x_j) = c_{f,p}(x_j) + hs_{n-j}$, que es estrictamente menor que la de x_i, $c_{f,p+v}(x_i) = c_{f,p}(x_i) + hs_{n-i}$, ya que $s_{n-j}< s_{n-i}$. En consecuencia $x_j \notin f(X, p+v)$. Por tanto, ***f* cumple *POptEs***.

b) Sea f una correspondencia de votación posicional cualquiera, obtenida a partir del vector de puntuaciones ($s_0, s_1,\ldots, s_{n-1}$) donde $s_0 \leq s_1 \leq\ldots \leq s_{n-1}$ y $s_0 < s_{n-1}$. Considérese una situación cualquiera (X, p) en la que $X = \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$. Llamemos, como antes, $c_{f,p}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} s_{n-j} r(x_i, j)$ y añadamos un conjunto v de h votantes del tipo $x_1 > x_2 >\ldots> x_{n-1} > x_n$. Cualquier candidato x_k tendrá en $p+v$ una cuenta $c_{f,p+v}(x_k) = c_{f,p}(x_k) + hs_{n-k}$. Si $x_i \in f(X, p)$ y $x_i >_v x_j$, y además $x_j \notin f(X, p)$, lo que implica que $c_{f,p}(x_i) > c_{f,p}(x_j)$, en $p+v$ tendremos $c_{f,p+v}(x_i) = c_{f,p}(x_i) + hs_{n-i}$ que es estrictamente mayor que $c_{f,p+v}(x_j) = c_{f,p}(x_j) + hs_{n-j}$ (ya que $c_{f,p}(x_i) > c_{f,p}(x_j)$ y $hs_{n-i} \geq hs_{n-j}$), y por tanto $x_j \notin f(X, p+v)$. Además, si $x_i \in f(X, p)$ y $x_i >_v x_j$, en $p+v$ tendremos $c_{f,p+v}(x_i) = c_{f,p}(x_i) + hs_{n-i}$ que es igual o mayor que $c_{f,p+v}(x_j) = c_{f,p}(x_j) + hs_{n-j}$ (ya que $c_{f,p}(x_i) \geq c_{f,p}(x_j)$ y $hs_{n-i} \geq hs_{n-j}$), y por tanto $x_j \in f(X, p+v)$ implica $x_i \in f(X, p+v)$. En consecuencia, ***f* cumple *POptCua***.

c) Sea $f_{PLURALIDAD}$ la correspondencia de votación Pluralidad (posicional obtenida a partir del vector de puntuaciones $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ donde $s_0 = s_1 = ... = s_{n-1} = 0$ y $s_{n-1} = 1$. Considérese una situación cualquiera (X, p) en la que $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Llamemos $c_{PLURALIDAD,p}(x_i)$ a la cuenta correspondiente a la correspondencia de votación Pluralidad para el candidato x_i en la situación (X, p), es decir, al número de primeros puestos de x_i en (X, p). Supongamos que añadimos un conjunto unánime v de h votantes del tipo $x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n$. Cualquier candidato x_k tendrá en $p+v$ una cuenta $c_{PLURALIDAD,p+v}(x_k) = c_{PLURALIDAD,p}(x_k) + h\delta_k$. (donde δ_k vale 1 si x_k ocupa el primer puesto en las preferencias de v, y 0 en caso contrario). Si $x_n \in f_{PLURALIDAD}(X, p)$ (lo que implica que $c_{PLURALIDAD,\, p}(x_n) \geq c_{PLURALIDAD,\, p}(x_j)$ para todo j), en $p+v$ tendremos: $c_{PLURALIDAD,p+v}(x_n) = c_{PLURALIDAD,p}(x_n) + h > c_{PLURALIDAD,p}(x_j) + 0 = c_{PLURALIDAD,p+v}(x_j)$ para todo j. Por tanto $f_{PLURALIDAD}(X, p+v) = \{x_n\}$. En consecuencia, $\boldsymbol{f_{PLURALIDAD}}$ **cumple *PPosEs***.

Considérese ahora la situación en que $X = \{a, b, c\}$ y p es el perfil siguiente con 2 votantes: $a > b > c$ (1 votante), $b > c > a$ (1 votante). Es claro que $f_{PLURALIDAD}(X, p) = \{a, b\}$. También es evidente que si añadimos un votante v del tipo $c > a > b$, $f_{PLURALIDAD}(X, p+v) = \{a, b\}$. Por tanto, $\boldsymbol{f_{PLURALIDAD}}$ **incumple *PPesFuer***.

d) Sea $f_{ANTIPLURALIDAD}$ la correspondencia de votación Antipluralidad, que es la correspondencia de votación posicional obtenida a partir del vector de puntuaciones $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$, donde $s_0 = 0$ y $s_1 = ... = s_{n-2} = s_{n-1} = 1$. Considérese la situación en que $X = \{a, b, c\}$ y p es el perfil siguiente con 2 votantes: $a > b > c$ (1 votante), $b > a > c$ (1 votante). Es claro que $f_{ANTIPLURALIDAD}(X, p) = \{a, b\}$ y que si añadimos un votante v del tipo $a > b > c$, $f_{ANTIPLURALIDAD}(X, p+v) = \{a, b\}$. Por tanto, $\boldsymbol{f_{ANTIPLURALIDAD}}$ **incumple *PPosEs* y *PPesFuer***. □

En la siguiente tabla se resumen todos los resultados mencionados u obtenidos en esta sección:

	f_{COP}	f_{BLACK}	f_{MAXMIN}	*Alguna CV Condorcet*	*Toda CV Posicional*	f_{PLU}	f_{APLU}	*Toda CV Posicional Propia*	f_{BORDA}
POptEs	No	No	No	No	No	No	No	Sí	Sí
PPosEs	No	No	No	Si	No	Sí	No	Sí	Sí
POptCua	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
PPosCua	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
POptSem	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
PPosSem	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
PCV	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
POpt	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
PPos	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
P-AVB	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
P-AVBU	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
PPesFuer	No	No	No	No	No	No	No	Sí	Sí
P-LMM	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
P-TVBU	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
PPes	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
P-OptyPes	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
P-TVB	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
P-DD	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
PNeg	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
P-DF	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 4.1. Tabla resumen de cumplimiento de propiedades.

Merece la pena observar que, como queda ilustrado en las proposiciones anteriores y en la Tabla 4.1 que las resume, el incumplimiento de las propiedades de Participación por parte de las correspondencias Condorcet está muy ampliamente extendido, hasta el punto de que podríamos decir que el incumplimiento de dichas propiedades es la regla, mientras que el cumplimiento de las mismas es más bien la excepción.

En efecto, no solamente hay propiedades que ninguna correspondencia Condorcet satisface, como atestiguan los numerosos resultados de imposibilidad estudiados sino que, en el caso de aquellas propiedades suficientemente débiles como para que sí sean satisfechas por alguna correspondencia Condorcet, suele ocurrir que las correspondencias que las satisfacen siguen siendo excepcionales.

Por ejemplo, es bien sabido, como atestiguan la Proposición 3.10 y Proposición 3.11 del capítulo anterior, que las propiedades de *Participación Positiva* y *Participación Negativa* son incumplidas por casi todas las correspondencias Condorcet. Pues bien, los resultados aquí obtenidos, y resumidos en la Tabla 4.1 permiten conjeturar que, para propiedades tan débiles como *P-DF* (incumplida por las tres las correspondencias Condorcet exploradas, Black, Copeland y MaxMin), también sean excepcionales las correspondencias Condorcet que las cumplen. Confirmar esa conjetura podría ser un objeto de investigación futuro.

4.3. Extensión del Teorema de Moulin al contexto de *k*-Funciones y *k*-Correspondencias de Votación Condorcet.

Hasta ahora, el análisis de las propiedades de Participación se ha centrado en las correspondencias de votación, en un intento de extender el Teorema de Moulin (1988a) aplicado a los métodos Condorcet. En esta sección trataremos la posibilidad de ampliar dicha investigación, aplicando los conceptos y los resultados obtenidos para el caso particular de las llamadas "*k*-funciones de votación" (*k-choice functions*), es decir, cuando la regla de elección exige la elección de un número fijo k de ganadores, en cualquier situación (X, p).

Son en estas *k*-funciones en las que se basan las denominadas "reglas de los k nombres" (Coelho, 2004, Barberá y Coelho, 2007) pues, a partir de un conjunto de candidatos, un comité selecciona un conjunto con exactamente k candidatos mediante una votación y, a partir de esta primera selección, un individuo o comité diferente del inicial elige un candidato único de ese primer conjunto de k candidatos.

Puesto que el procedimiento de votación utilizado para la selección de los k candidatos, la k-función utilizada, puede ser muy variado, estas reglas son, en realidad, una familia de diferentes reglas. Por ejemplo, la llamada “rule of three names” en Estados Unidos, “regla de la terna” en España o “lista tríplice” en Brasil, son reglas de k nombres cuando el valor de k es tres. Evidentemente, el número k puede tomar diferentes valores y, en este sentido, tanto en el pasado como en la actualidad, pueden encontrarse otros muchos ejemplos de la utilización de este tipo de reglas (Barberá y Coelho, 2007): la elección de los obispos en la Iglesia Católica, la elección de los rectores de las universidades públicas en Brasil, la elección de los miembros del Tribunal Superior de Justicia en Chile… Más en general, este tipo de reglas también son adecuadas, por ejemplo, para la selección de los nominados para un determinado premio (a partir de los cuales determinar un ganador final), la elección de entre un conjunto de políticas alternativas para resolver un problema social común, etc.

En cualquier caso, parece claro que un punto importante de cualquier regla de los k nombres es el modo en el que se seleccionan esos primeros k candidatos, es decir, la k-función cuyo resultado será objeto de la selección posterior.

Definamos de un modo formal el concepto de k-función de elección social, f_k:

Sea $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$, un conjunto con dos o más candidatos y $V = \{1, 2,..., m\}$ un conjunto de votantes, compuesto por un número finito de individuos mayor o igual que dos y sea $p = (p_1,..., p_m) \in \boldsymbol{P}$ un perfil de preferencias de V sobre X, cuyos m componentes, uno por cada votante, es un orden lineal estricto y completo de los elementos de X, siendo $\boldsymbol{P}$ el conjunto de todos los perfiles posibles de preferencias de V sobre X.

Dado un $k \in \{1, 2,..., \#X\}$, sea 2^X el conjunto de todos los subconjuntos de X y $X_k \equiv \{A \in 2^X: \#A = k\}$ el conjunto de todos los posibles subconjuntos de X con cardinalidad igual a k.

Definición 4.1 (k-función)

Llamamos ***k-función*** a toda función f_k: $(X, p) \rightarrow X_k$ que a cada situación (X, p) le asigna un conjunto A de X_k, a partir del perfil de preferencias p.

A partir de esta definición podemos identificar distintos tipos de familias de k-funciones, del mismo modo que se ha realizado con las correspondencias de votación. A continuación nos centraremos en lo que podríamos denominar k-funciones Condorcet.

4.3.1. k-Funciones Condorcet.

Existe una amplia literatura dedicada al análisis de las funciones y correspondencias de votación Condorcet y, sin embargo, hasta hace poco, se ha prestado muy poca atención al problema de seleccionar un subconjunto predeterminado de ganadores a partir de las alternativas factibles.

Estudios sobre estas cuestiones y, en particular, sobre la *Selección de Comités*, aparecen inicialmente en autores como Chamberlin y Courant (1977), Fishburn (1981), o Gehrlein (1985). En todos ellos se observa la idea de que los comités seleccionados deben ser consistentes con la idea de la representación proporcional. Más en concreto, Chamberlin y Courant (1977) escriben: "*La representación proporcional… busca dotar a cada votante con un candidato que pueda representar genuinamente sus puntos de vista en las deliberaciones y las decisiones del cuerpo representativo*".

En el contexto de las correspondencias de votación Condorcet, esa idea de consenso se ha traducido en la elección de un candidato que venciera por mayoría estricta a todos los demás en su comparación por pares. Ahora, cuando las reglas de elección exigen la selección de un número concreto de alternativas o candidatos ganadores, parece que el modo natural de extender esa idea de consenso consiste en la búsqueda de un comité que mantenga la idea original de ganador de Condorcet.

En este sentido, el primero en aproximarse a lo que podríamos denominar un *Comité Condorcet*, es decir, a una adaptación del concepto de Candidato Condorcet a k-funciones, es el trabajo de Fishburn (1981):

Definición 4.2 (Comité Condorcet de Fishburn)

Decimos que un conjunto $A \in X_k$ es un ***Comité Condorcet*** si es preferido por una mayoría de votantes a cualquier otro subconjunto de k candidatos de X.

Por supuesto, como en el caso del candidato Condorcet (un subconjunto con un único candidato), no es necesario que tal comité Condorcet exista.

Haciendo uso de este concepto, Fishburn (1981) encuentra, entre otras cosas, que dentro de los métodos de votación tipo *nonranked* (donde cada votante selecciona un conjunto s de candidatos *nominados*, de los cuales serán elegidos los k, $s<k$, más votados, que formarán parte del comité seleccionado), sólo el Voto Aprobatorio (Approval Voting) selecciona a dicho comité cuando existe, bajo el supuesto de que los votantes prefieren un conjunto de candidatos *nominados* a otro, si el número de favoritos en uno es mayor que en otro.

Por su parte, Gehrlein (1985) hace un análisis similar al de Fishburn, para las mismas reglas de votación, y se interesa por saber cuál es la probabilidad de que exista un Comité Condorcet en cada situación, y por conocer la eficiencia de dichas reglas, en el sentido de saber cuál es la probabilidad de que, si existe, dicho comité sea elegido. La diferencia, sin embargo, está precisamente en su noción de Comité Condorcet.

El concepto que se utiliza en Gehrlein (1985) se centra en la elección de un comité en base a los candidatos que lo forman, y no en función del grupo en su conjunto. En consecuencia, el Comité Condorcet se define como un subconjunto de k miembros de X, tal que cada miembro de ese subconjunto vence a cualquier otro candidato no perteneciente a ese subconjunto, sobre la base de la regla de la mayoría simple.

Definición 4.3 (k-conjunto Condorcet o Comité Condorcet de Gehrlein)

Sea A un subconjunto de X. Dado el perfil p definido sobre X, decimos que A es un ***k-conjunto Condorcet*** en p si A tiene k elementos y $p(a, x) > p(x, a)$ para todo $a \in A$ y todo $x \in X\text{-}A$.

Una versión débil del Comité de Condorcet de Gehrlein considera un subconjunto de k miembros de X, tal que cada miembro de ese subconjunto vence o empata con cualquier otro candidato no perteneciente a ese subconjunto.

Es fácil deducir de la definición que si para un perfil existe un k-conjunto Condorcet, este es único, es decir, no existe ningún otro k-conjunto que también sea Condorcet. Sin embargo, sí puede haber varios k-conjuntos que sean Condorcet Débil, dada la posibilidad de empates. Al igual que en el caso $k = 1$, si es Débil no tiene por qué ser único.

En relación a estas dos definiciones de Comité Condorcet por parte de Fishburn y Gehrlein, en su versión estricta, Kaymak y Sanver (2003) analizan la posibilidad de determinar si un conjunto es un conjunto de ganadores Condorcet definido según Fishburn o no, sobre la base única de las preferencias individuales y concluyen que, bajo ciertos axiomas de extensión de las preferencias individuales sobre alternativas a conjuntos de alternativas, el concepto de Comité Condorcet de Fishburn puede expresarse en términos del Comité Condorcet de Gehrlein.

En este mismo sentido, es importante señalar que la elección en nuestro caso de la definición de k-conjunto Condorcet o Comité Condorcet a la Gehrlein a lo largo del análisis a continuación responde simplemente a la necesidad de mantener una coherencia con la investigación desarrollada hasta ahora, donde el supuesto de partida es que la información de la se dispone inicialmente es el perfil de preferencias individuales sobre alternativas y no las preferencias entre conjuntos.

Por otro lado, los mismos Kaymak y Sanver (2003) también concluyen que, para la mayoría de perfiles de preferencias sobre alternativas, no existirá un conjunto de alternativas que garanticen ser un ganador de Condorcet para cualquier perfil de preferencias sobre conjuntos de alternativas. Ahora bien, y a pesar de este primer resultado negativo que puede parecer descorazonador a la hora de intentar seleccionar un Comité Condorcet señalan que, siendo menos exigentes y supuesta una determinada propiedad de no dominación entre conjuntos, esa condición es necesaria y suficiente para conseguir que exista algún perfil de preferencias sobre alternativas, que permita asegurar la obtención de un conjunto ganador de Condorcet. Más aún, dado cualquier perfil de preferencias sobre alternativas siempre existirá un conjunto de alternativas satisfaciendo dicha condición de no dominación.

En cualquier caso, una vez apuntada la problemática sobre la posible existencia de un Comité Condorcet, y establecido ya el concepto de *k*-conjunto Condorcet o Comité Condorcet a la Gehrlein como el más apropiado para extender la idea de Candidato Condorcet en el contexto de las *k*-funciones, el siguiente paso es definir el conjunto de métodos que podemos considerar *k*-Condorcet:

Definición 4.4 (Función k-Condorcet)

Decimos que una *k*-función $\boldsymbol{f_k}$ ***es k-Condorcet*** si en toda situación (X, p) en que exista un *k*-conjunto Condorcet (A_k), $f_k(X, p) = A_k$.

Como puede observarse, la definición dada de función de votación *k*-Condorcet es una extensión natural de lo que hasta ahora hemos venido denominado función de votación Condorcet, pues cuando $k = 1$ el concepto que nos surge es el de regla o función Condorcet.

Una vez definida la familia de funciones *k*-Condorcet, como extensión natural de función Condorcet, podemos adentrarnos en el estudio de la Participación y Manipulación mediante Abstención en funciones *k*-Condorcet.

El primer paso que seguiremos para ello, consiste en adaptar el concepto de participación según un orden de preferencias entre subconjuntos al contexto de las *k*-funciones:

Definición 4.5 (k-Participación según el orden entre conjuntos O)

Decimos que la *k*-función f_k cumple ***k-Participación según el orden entre conjuntos O*** (abreviadamente, cumple *k-P-O*) si, para todo conjunto potencial de votantes unánime *v*, y para todo perfil *p*, es falso que el conjunto $f_k(p)$ sea preferido por *v* según el orden *O* a $f_k(p+v)$.

Dicho de otro modo, no existe ningun perfil *p* y ningún votante *v* tales que $f_k(p)\ O_v\ f_k(p+v)$ para las preferencias de *v*.

A partir de esta definición podemos establecer lo que entendemos por *k*-manipulación:

Definición 4.6 (k-Manipulación mediante abstención según el orden entre conjuntos O)

Decimos que la *k*-función $\boldsymbol{f_k}$ **es *k-manipulable mediante abstención según el orden entre conjuntos O*** si no cumple *k-Participación* según el orden entre conjuntos *O*, es decir, si existe un perfil *p* y un votante *v*, tales que el conjunto $f_k(p)$ es preferido por *v* según el orden *O* a $f_k(p+v)$.

Una vez extendido el concepto de manipulación mediante abstención según un orden entre conjuntos *O* al contexto de las *k*-funciones, está claro que, si una *k*-función es manipulable según un determinado orden, también lo será mediante cualquier otro orden implicado por él.

Análogamente, si una *k*-función cumple *k*-Participación según determinado orden, también la cumplirá para cualquier otro orden que lo implique, de manera que seguiría siendo relevante el esquema lógico de propiedades de Participación obtenido en el Capítulo 3, pero ahora aplicado a las propiedades de *k*-Participación.

4.3.2. Extensión del Teorema de Moulin al contexto de las k-funciones Condorcet.

Una vez extendidos los conceptos de Candidato Condorcet, Participación y manipulación mediante abstención al nuevo contexto de las *k*-funciones, intentaremos extender también los resultados obtenidos para funciones de votación Condorcet, en concreto el Teorema de Moulin (1988a), a funciones *k*-Condorcet.

Para ello resulta preciso definir el concepto de Candidato Tapado por un k-conjunto y establecer un resultado intermedio que nos sirva de ayuda en la obtención de algún resultado en torno a alguna propiedad de k-Participación.

Definición 4.7 (Candidato Tapado por un k-conjunto)

Dada una situación (X, p), decimos que un ***candidato a está tapado por un k-conjunto B*** si, siendo $\alpha = \text{Max}\{p(a, b)\}_{b\in B}$ y $\beta = \text{Min}\{\text{Min}\{p(b, x)\}_{x\in X}\}_{b\in B}$, se cumple que $\alpha < \beta$.

Obsérvese que, en el caso particular $k = 1$, la definición de Tapado se reduciría a decir que a es tapado por b si $p(a, b) < \text{Mín}\{p(b, x)\}_{x\in X-\{b\}}$, que es precisamente la condición que permitía en el Lema 3.2 excluir al candidato a del conjunto de los elegidos. Además, si a es tapado por B, cualquier $p(a, b)$ es menor que la mitad del número de votantes.

A continuación, adaptaremos también el Lema 3.2 a este nuevo contexto.

Lema 4.1 (Lema 3.2 en el contexto de k-funciones)

Dada una situación (X, p):

a) Si f_k cumple k-Opt-*Participación* y el candidato a es tapado por B, entonces $a\notin f_k(p)$.
b) Si f_k cumple k-Pes-*Participación* y Traslación Invariante Débil, y además el candidato a es tapado por B, entonces $a\notin f_k(p)$.

Es decir, ningún candidato que esté tapado pertenece al k-conjunto elegido.

Demostración:

a) Sea a tapado por $B = \{b_1, b_2,\ldots, b_k\}$ en un perfil p con m votantes. En ese caso, $\alpha < \beta$, siendo $\alpha = \text{Max}\{p(a, b)\}_{b\in B}$ y $\beta = \text{Min}\{\text{Min}\{p(b, x)\}_{x\in X-B}\}_{b\in B}$. Sea $\delta = \text{Min}\{p(b, a)\}_{a\in A}$. Obsérvese en primer lugar que si $\alpha = p(a, b_j)$, se implica que $\delta = p(b_j, a)$. Por tanto, $\alpha + \delta = m$. Si añadimos a p un conjunto v de δ-β votantes con las siguientes preferencias: $a > b_1 > b_2 >\ldots > b_k >\ldots$, obtendremos un nuevo perfil $p' = p + v$ con $m' = m + \delta - \beta$ votantes. Vamos a demostrar que, en este nuevo perfil, B es un conjunto k-Condorcet.

Por otra parte, para todo $b \in B$, $p'(b, a) = p(b, a)$, mientras que $p'(a, b) = p(a, b) + \delta - \beta$. Puesto que $\delta < p(b, a)$ y $\beta > p(a, b)$, se deduce que $p'(a, b) = p(a, b) + \delta - \beta < p(b, a) = p'(b, a)$. Por tanto, $p'(b, a) > m'/2$.

Además, para todo $b \in B$ y $x \in X\text{-}B\text{-}\{a\}$, $p'(b, x) = p(b, x) + \delta - \beta$. Afirmar que $p'(b, x) > m'/2$ es equivalente a afirmar que $p(b, x) + \delta - \beta > (m + \delta - \beta)/2$, o lo que es lo mismo: $2p(b, x) + \delta - \beta > m$. Y lo anterior equivale a afirmar que $p(b, x) + \delta + p(b, x) - \beta > m$. Y esta última afirmación es correcta, ya que $p(b, x) \geq \beta > \alpha$ y $\alpha + \delta = m$. Por tanto, $p'(b, x) > m'/2$.
En consecuencia, en el nuevo perfil, B es un conjunto k-Condorcet, lo que excluye al candidato a del k-conjunto elegido en p'.

Así pues, puesto que $B = f_k(p')$ y $\text{Sup}_v f_k(p') <_v a$, si f cumple k-Opt-*Participación*, $a \notin f_k(p)$.

b) Sea a tapado por $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ en un perfil p con n candidatos (siendo $n > k$) y m votantes. También ahora, como en (a), $\alpha < \beta$, siendo $\alpha = \text{Max}\{p(a, b)\}_{b \in B}$ y $\beta = \text{Min}\{\text{Min}\{p(b, x)\}_{x \in X\text{-}B}\}_{b \in B}$. Sea $\delta = \text{Min}\{p(b, a)\}_{a \in A}$. Supongamos que se añade $(\delta - \beta)$ veces un bloque con $n!$ votantes, cada uno de los cuales tiene una de las $n!$ preferencias posibles entre los n candidatos. En el nuevo perfil p', que tiene $m + (\delta - \beta)n!$ votantes, puesto $p'(y, z) = p(y, z) + (\delta - \beta)n!/2$, es claro que $\alpha' = \alpha + (\delta - \beta)n!/2$, $\beta' = \beta + (\delta - \beta)n!/2$ y $\delta' = \delta + (\delta - \beta)n!/2$. Por tanto, sigue cumpliéndose que $\alpha' = \text{Max}\{p'(a, b)\}_{b \in B} < \beta' = \text{Min}\{\text{Min}\{p'(b, x)\}_{x \in X\text{-}B}\}_{b \in B}$. Si ahora se eliminan los $\delta - \beta$ votantes con preferencias $b_1 > b_2 > \ldots > b_k > a$, obtendremos un nuevo perfil p'' con $m'' = m' - (\delta - \beta)$ votantes. Vamos a demostrar, mediante un razonamiento análogo al de (a), que B es un conjunto k-Condorcet en p''.

Para todo $b \in B$, $p''(b, a) = p'(b, a) - (\delta' - \beta') = p'(b, a) - (\delta - \beta)$, mientras que $p''(a, b) = p'(a, b)$. Puesto que $\delta' < p'(b, a)$ y $\beta' > p'(a, b)$, se deduce que $p''(a, b) = p'(a, b) < p'(b, a) - \delta' + \beta'. = p'(b, a) - (\delta' - \beta') = p''(b, a)$. Por tanto, $p''(b, a) > m''/2$.

Además, para todo $b \in B$ y $x \in X\text{-}B\text{-}\{a\}$, $p''(b, x) = p'(b, x)$, mientras que $p''(x, b) = p'(x, b) - (\delta' - \beta')$. Así pues, $p''(b, x) > m''/2$ es equivalente a $p'(b, x) > p'(x, b) - (\delta' - \beta')$, también a

$\delta' - \beta' + 2p'(b, x) > m'$, y también a $p'(b, x) + \delta' + p'(b, x) - \beta' > m$. Y esta última afirmación es correcta, ya que $p'(b, x) \geq \beta' > \alpha'$ y $\alpha' + \delta' = m'$. Por tanto, $p''(b, x) > m''/2$.

En consecuencia, en el nuevo perfil p'', B es un conjunto k-Condorcet, lo que excluye al candidato a del k-conjunto elegido en dicho perfil.

La situación es la siguiente: En el perfil p'' es elegido el k-conjunto B, pero si los δ - β votantes con preferencias $b_1 > b_2 > \ldots > b_k > a$, decidieran votar, estaríamos en el perfil p'. Si el candidato a, que es menos preferido por estos votantes que cualquiera de los candidatos de B, fuera elegido en el perfil p' (que equivale, en virtud de la propiedad de Traslación Invariante Débil a que lo fuera en el perfil p), es claro que f_k incumpliría k-Pes-*Participación*. □

Ahora ya estamos en disposición de extender el Teorema de Moulin (1988a) al contexto de las k-funciones.

Proposición 4.6 (k-Manipulación Optimista y Pesimista)

Toda k-función f_k que sea k-Condorcet es ***k-manipulable según el orden Opt*** (incumple la propiedad de *k-Opt-Participación*). Además, si f_k cumple Traslación Invariante Débil, entonces es ***k-manipulable según el orden Pes*** (incumple la propiedad de *k-Pes-Participación*).

Obsérvese que es evidente que también será *k-Manipulable* según cualquiera de los órdenes implicados por el orden *Opt* (*Pes*).

Demostración:

Sea la situación (X, p) con $m = 15$ votantes, donde X es el conjunto con $n = 5k$ candidatos $\{a_1 \ldots a_k, b_1 \ldots b_k, c_1 \ldots c_k, d_1 \ldots d_k, e_1 \ldots e_k\}$ y p es el perfil siguiente, en el que aparecen los k-conjuntos $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$, $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$ y $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$: $[\{b_1 \ldots b_k\} > \{a_1 \ldots a_k\} > \{c_1 \ldots c_k\} > \{e_1 \ldots e_k\} > \{d_1 \ldots d_k\}$ (4 votantes), $\{d_1 \ldots d_k\} > \{a_1 \ldots a_k\} > \{b_1 \ldots b_k\} > \{c_1 \ldots c_k\} > \{e_1 \ldots e_k\}$ (5 votantes), $\{e_1 \ldots e_k\} > \{d_1 \ldots d_k\} > \{b_1 \ldots b_k\} > \{c_1 \ldots c_k\} > \{a_1 \ldots a_k\}$ (3 votantes), $\{e_1 \ldots e_k\} > \{d_1 \ldots d_k\} > \{c_1 \ldots c_k\} > \{b_1 \ldots b_k\} > \{a_1 \ldots a_k\}$ (3 votantes)].

La matriz de comparaciones (resumida por bloques) es M_p:

	$a_1 \ldots a_k$	$b_1 \ldots b_k$	$c_1 \ldots c_k$	$d_1 \ldots d_k$	$e_1 \ldots e_k$
$a_1 \ldots a_k$		5	9	4	9
$b_1 \ldots b_k$	10		12	4	9
$c_1 \ldots c_k$	6	3		4	9
$d_1 \ldots d_k$	11	11	11		5
$e_1 \ldots e_k$	6	6	6	10	

Supongamos que f_k es k-Condorcet y que, además, o bien cumple *k-Opt-Participación* o bien cumple Traslación Invariante Débil y *k-Pes-Participación*. En virtud del lema Lema 4.1:

a) Para todo $b_i \in B$: $\text{Max}\{p(b_i, d)\}_{d\in D} = 4 < 5 = \text{Min}\{\text{Min}\{p(d, x)\}_{x\in X}\}_{d\in D}$. Por tanto, $b_i \notin f_k(X, p)$

b) Para todo $c_i \in C$: $\text{Max}\{p(c_i, b)_{b\in B} = 3 < 4 = \text{Min}\{\text{Min}\{p(b, x)\}_{x\in X}\}_{b\in B}$. Por tanto, $c_i \notin f_k(X, p)$

c) Para todo $a_i \in A$: $\text{Max}\{p(a_i, d)\}_{d\in D} = 4 < 5 = \text{Min}\{\text{Min}\{p(d, x)\}_{x\in X}\}_{d\in D}$. Por tanto, $a_i \notin f_k(X, p)$

d) Para todo $d_i \in D$: $\text{Max}\{p(d_i, e)\}_{e\in E} = 5 < 6 = \text{Min}\{\text{Min}\{p(e, x)\}_{x\in X}\}_{e\in E}$. Por tanto, $d_i \notin f_k(X, p)$

En consecuencia, $f_k(X, p) = E$.

Si ahora añadimos, uno a uno, 4 votantes con preferencias $\{c_1 \ldots c_k\} > \{e_1 \ldots e_k\} > \{a_1 \ldots a_k\} > \{b_1 \ldots b_k\} > \{d_1 \ldots d_k\}$, obtenemos al final un nuevo perfil p'. La nueva matriz final de comparaciones es $M_{p'}$:

	$a_1 \ldots a_k$	$b_1 \ldots b_k$	$c_1 \ldots c_k$	$d_1 \ldots d_k$	$e_1 \ldots e_k$
$a_1 \ldots a_k$		9	9	8	9
$b_1 \ldots b_k$	10		12	8	9
$c_1 \ldots c_k$	10	7		8	13
$d_1 \ldots d_k$	11	11	11		5
$e_1 \ldots e_k$	10	10	6	14	

Y en virtud nuevamente del Lema 4.1, los candidatos pertenecientes a los conjuntos *C*, *D* y *E* están tapados por otros *k*-conjuntos (los de *C* por *B*, los de *D* por *E* y los de *E* por *C*) y por tanto ninguno de ellos formará parte del *k*-conjunto elegido en el nuevo perfil *p'*.

Por tanto, el *k*-conjunto elegido en *p'* ha de estar formado por elementos de *A* o de *B*. Ello significa que, en algún momento del transcurso de la adición de los nuevos votantes, al añadir el nuevo votante ha dejado *E* de ser el *k*-conjunto elegido, en favor de algún *k*-conjunto contenido en $A \cup B$ (ambos menos preferidos que *E* por dicho votante), lo cual contradice el cumplimiento de las propiedades de *k-Opt*-Participación y *k-Pes*-Participación). □

En relación a los resultados anteriores, en el contexto de lo que podría ser un estudio más completo y detallado de las funciones y correspondencias *k*-Condorcet, es necesario hacer una consideración: La definición adoptada de candidato *k*-Condorcet parece relativamente débil, lo cual implica que la condición de función *k*-Condorcet es relativamente fuerte, lo que a su vez implicaría que existen pocas funciones que sean *k*-Condorcet. Esta impresión parece verse confirmada al comprobar, como se hace en el siguiente ejemplo, que una extensión natural de las correspondencias de votación Condorcet a este nuevo contexto puede no ser *k*-Condorcet.

Por ejemplo, supongamos una situación (*X, p*) con 6 candidatos y 15 votantes, a la que corresponde la siguiente Matriz de Comparaciones, M_p:

	x_1	x_2	x_3	a	*b*	*c*
x_1		5	10	8	8	8
x_2	10		5	8	8	8
x_3	5	10		8	8	8
a	7	7	7		8	7
b	7	7	7	8		7
c	7	7	7	8	8	

Apliquemos a este ejemplo a lo que podríamos considerar la extensión natural del método MaxMin que llamamos 3-función Maxmin. Esta correspondencia elegiría a los tres candidatos con el mínimo más alto de sus filas que, en el ejemplo, son el conjunto de los tres candidatos {*a*, *b*, *c*} (los tres con un mínimo de 7). Sin embargo, y como se comprueba fácilmente, el conjunto de candidatos $\{x_1, x_2, x_3\}$ es un conjunto 3-Condorcet, pues estos tres candidatos vencen por mayoría estricta a todos los demás. Por lo tanto, y a pesar de que el método MaxMin es un método Condorcet, su extensión natural no es una función 3-Condorcet.

En un sentido análogo, Ratliff (2003), generaliza el método de Dogson y Kemeny para seleccionar el comité más cercano al Comité de Condorcet cuando éste no existe y encuentra algunas inconsistencias sorprendentes en este proceso, como por ejemplo, que en situaciones en que existe un candidato Condorcet, pueda no pertenecer al comité seleccionado por estos métodos, o que los comités seleccionados por ambos métodos puedan ser conjuntos disjuntos.

Convendría quizás, en consecuencia (y así lo intentaremos en el futuro), explorar las posibilidades de conseguir una definición menos estricta de los métodos *k*-Condorcet que pudiera incluir como ejemplos las extensiones naturales mencionadas de los métodos Condorcet.

4.3.3. Propiedades de k-Participación en algunas k-Funciones.

En esta sección vamos a tratar de definir también de modo natural nuevas *k*-funciones, como extensión de las de las reglas de votación posicionales y explorar en ellas el cumplimiento de las propiedades de *k*-Participación.

De este modo, dada una función Posicional (*scoring rule*) *f*, sea $scor_f(x)$ el *score* o puntuación que *f* atribuye a la alternativa o candidato *x*. Definimos, a partir de *f*, dos *k*-funciones, una directa y otra iterada o secuencial:

Definición 4.8 (k-función directa)

Dada una función posicional *f* y sus correspondientes puntuaciones $scor_f(x)$, llamamos ***k-función directa*** derivada de *f*, y la denotamos $f_{k,DIR}$, a la *k*-función que elige a los *k* candidatos con mayor puntuación, $scor_f(x)$ (resolviéndose los empates, cuando loa haya, de manera determinista, por ejemplo alfabéticamente).

Expongamos un ejemplo aclaratorio:

Ejemplo 4.1

Sea la siguiente situación con un perfil p:

2 votantes: $a > b > c$

5 votantes: $c > a > b$

6 votantes: $b > c > a$

La matriz de comparaciones es M_p:

	a	b	c
a		7	2
b	6		8
c	11	5	

Si consideramos que f es el método de Borda, las puntuaciones Borda de a, b, c, son, respectivamente, 9, 14 y 16. Por tanto el candidato ganador de f es $f(p)=\{c\}$, y el conjunto de dos candidatos ganador para la *2*-función directa $f_{2,DIR}$ es $f_{2,DIR}(p) = \{c, b\}$.

Definición 4.9 (k-función iterada)

Dada una función posicional f y sus correspondientes puntuaciones $scor_f(x)$, llamamos ***k-función iterada*** derivada de f, y la denotamos $f_{k,IT}$, a la k-función que elige a los candidatos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ tales que x_1 tiene la puntuación ($scor_f(x_1)$) máxima en X, x_2 tiene la puntuación ($scor_f(x_2)$) máxima en X-$\{x_1\}$, y así sucesivamente.

En el Ejemplo 4.1 anterior, si seguimos considerando f como el método de Borda, las puntuaciones Borda de a, b, c, eran, respectivamente, 9, 14 y 16, y el candidato ganador de f era $f(p)=\{c\}$. Al eliminar c, el perfil p' es:

2 votantes: $a > b$

5 votantes: $a > b$

6 votantes: $b > a$

En el cual las puntuaciones Borda de a e b son, respectivamente, 7 y 6, y el conjunto de dos candidatos ganador para la 2-función iterada $f_{2,IT}$ es $f_{2,IT}(p) = \{c, a\}$.

Es intuitivamente claro que la k-función directa derivada de f cumplirá k-Participación, pero no lo es tanto que la k-función iterada derivada de f la cumpla o no. En el ejemplo siguiente se ve que no la cumple del todo, en concreto, que la 2-función iterada derivada de *Borda*, que llamamos $BO_{2,IT}$, incumple participación en sentido *Opt*, en sentido *Pes* y en sentido *LMM*.

Ejemplo 4.2

Sea la siguiente situación con un perfil p:

2 votantes: $b > c > a$
2 votantes: $c > a > b$
1 votantes: $a > b > c$

La matriz de comparaciones es M_p:

	a	b	c
a		3	1
b	2		3
c	4	2	

Y supongamos que los desempates se resuelven de acuerdo con el orden estricto $b > c > a$. Las puntuaciones de Borda en p de a, b, c, son, respectivamente, 4, 5 y 6. Al eliminar c, el perfil p' es:

2 votantes: $b > a$
2 votantes: $a > b$
1 votantes: $a > b$

En el cual las puntuaciones Borda de a y b son, respectivamente, 3 y 2, y el conjunto de dos candidatos ganador es $BO_{2,IT}(p) = \{a, c\}$.

Si ahora añadimos un votante v con preferencias $a > b > c$, tenemos el perfil $p+v$:

2 votantes: $b > c > a$

2 votantes: $c > a > b$

2 votantes: $a > b > c$

Las puntuaciones Borda en $p+v$ de a, b, c, son, respectivamente, 6, 6 y 6. Suponemos como antes que los desempates se resuelven de acuerdo con el orden estricto $b > c > a$. En ese caso, el ganador es b. Al eliminar b, el perfil p'' es:

2 votantes: $c > a$

2 votantes: $c > a$

2 votantes: $a > c$

En el cual las puntuaciones Borda de a y c son, respectivamente, 2 y 4, y el conjunto de dos candidatos ganador es $BO_{2,IT}(p+v) = \{b, c\}$.

En conclusión, dado un votante con preferencias $a > b > c$, antes de votar eran elegidos su mejor y su peor valorado candidato, pero al votar son elegidos sus dos peor valorados candidatos.

Es claro que $BO_{2,IT}(p)$ $\mathbf{LMM_v}$ $BO_{2,IT}(p+v)$ y que $BO_{2,IT}(p)$ $\mathbf{Opt_v}$ $BO_{2,IT}(p+v)$.

4.3.4. Adaptación de conceptos y resultados al contexto de k-Correspondencias.

Se han definido previamente los conceptos de k-función de votación (que elige k ganadores para cada perfil) y de función k-Condorcet (que elige como ganador, para cualquier perfil p, al conjunto $A \in X_k$ si éste es el conjunto de candidatos k-Condorcet).

Pues bien, partiendo de dichas definiciones, definimos una *k-correspondencia* como sigue:

Definición 4.10 (k-correspondencia)

Dado un conjunto X de candidatos, decimos que f_k es una ***k-correspondencia*** si a cada perfil p sobre X le asigna una familia no vacía de k-conjuntos de X. Es decir, para todo p, $f_k(p) \subset X_\mathrm{k}$.

En este sentido, por ejemplo, la *k-correspondencia de Borda* directa, llamada $BO_{k,DIR}$, elige todos los k-conjuntos cuyos elementos tienen las k mayores puntuaciones de Borda, y la *k-correspondencia de Borda iterada*, llamada $BO_{k,IT}$, elige todos los k-conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ tales que x_1 tiene la puntuación de Borda máxima en X, x_2 tiene la puntuación máxima en X-$\{x_1\}$, y así sucesivamente.

Definición 4.11 (k-correspondencia k-Condorcet)

Decimos que la ***k-correspondencia*** $\boldsymbol{f_k}$ ***es k-Condorcet*** si para todo perfil p, ocurre que si A es el k-conjunto Condorcet en p, entonces $f_k(p) = \{A\}$.

Como vemos, ahora, el resultado de una k-correspondencia es un conjunto de conjuntos de k-candidatos y, una correspondencia k-Condorcet elige, entre esos k-conjuntos, si existe, aquel que es un k-conjunto Condorcet y sólo a él.

Dicho lo anterior, si pretendemos extender los conceptos de Participación a las k-correspondencias, ahora, a la hora de determinar si un resultado es mejor cuando un votante decide votar en lugar de abstenerse, los resultados a comparar serán conjuntos de conjuntos de k-elementos y, por tanto, ya no son suficientes los órdenes entre conjuntos sino que tenemos que extender la ordenación a k-órdenes entre familias de k-conjuntos.

Supongamos definido, para unas preferencias individuales v, un orden O entre conjuntos, por ejemplo *DF* u *Opt*. ¿Cómo podría extenderse dicho orden O a un orden k-O entre familias de k-conjuntos?

Definición 4.12 (k-Orden)

a) Versión exigente o α:

   F_1 k-α-O_v F_2 si para todo $A \in F_1$ y $B \in F_2$, A O_v B.

b) Versión moderada o β:

   F_1 k-β-O_v F_2 si existe un $A \in F_1$ tal que, para todo $B \in F_2$, A O_v B.

c) Versión débil o γ:

   F_1 k-γ-O_v F_2 si existe un $A \in F_1$ y un $B \in F_2$ tales que A O_v B.

Es decir, la familia F_1 es α-superior según el orden O a la familia F_2 si cada elemento de F_1 lo es de cada elemento de F_2, es β-superior si algún elemento de F_1 lo es de cada elemento de F_2, y es γ-superior si algún elemento de F_1 lo es de algún elemento de F_2.

Ejemplo 4.3

Dado un conjunto de candidatos $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, y un votante v con preferencias $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$, sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ los conjuntos o familias de 3-conjuntos siguientes:

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2\ A_3, A_4\}$$

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$$

donde $A_1 = \{x_2, x_3\ x_5\}$, $A_2 = \{x_1, x_4\ x_5\}$, $A_3 = \{x_2, x_3\ x_4\}$ y $A_4 = \{x_1, x_3, x_5\}$ y $B_1 =\{x_3, x_4\ x_5\}$ y $B_2 = \{x_2, x_4\ x_5\}$

Es fácil comprobar que:

a) Con respecto a la versión exigente α: $\mathcal{A}$ ***3-α-LMM*$_v$** $\mathcal{B}$, ya que A_j ***LMM*$_v$** B_i para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ y para todo $i \in \{1, 2\}$; pero es falso $\mathcal{A}$ ***3-α-Opt*$_v$** $\mathcal{B}$, ya que es falso A_1 **Opt$_v$** B_2.

b) Con respecto a la versión moderada β: $\mathcal{A}$ ***3-β-Opt*$_v$** $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ ***3-β-Pes*$_v$** $\mathcal{B}$, ya que A_2 **Opt$_v$** B_i y A_3 **Opt$_v$** B_i para todo $i \in \{1, 2\}$; pero es falso $\mathcal{A}$ ***3-β-DD*$_v$** $\mathcal{B}$, ya que es falso A_1 **DD$_v$** B_2.

c) Y con respecto a la versión débil γ: $\mathcal{A}$ ***3-γ-CDD$_v$*** $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ ***3-γ-OptyPes$_v$*** $\mathcal{B}$, ya que A_3 ***CDD$_v$*** B_1 y A_3 ***OptyPes$_v$*** B_1; pero es falso $\mathcal{A}$ ***3-γ-DD$_v$*** $\mathcal{B}$, ya que, para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ y para todo $i \in \{1, 2\}$, es falso A_j ***DD$_v$*** B_i.

La Figura 4.2 facilitará la visualización de las afirmaciones hechas en este ejemplo:

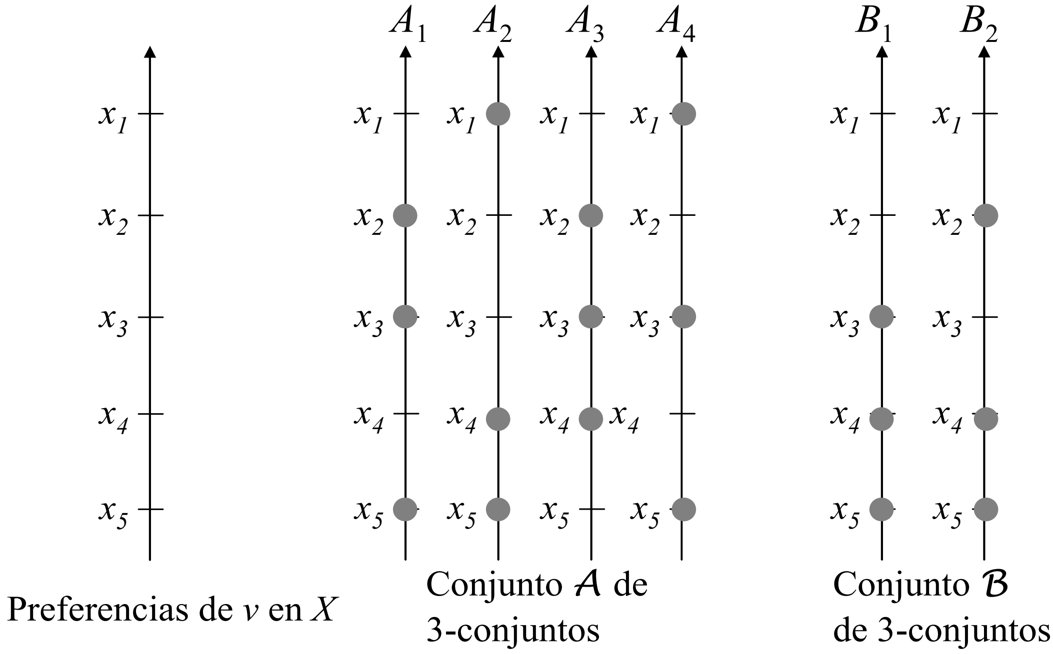


Figura 4.2 Comparación de los conjuntos de 3-conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

Con estas nuevas definiciones ya estamos en disposición de definir la Participación en este nuevo contexto (y de manera análoga podríamos definir la Manipulación mediante Abstención).

Definición 4.13 (k-Participación en Correspondencias según el Orden entre Conjuntos O)

a) Decimos que la k-correspondencia f_k cumple ***k-α-Participación para correspondencias según el orden entre conjuntos O*** (o *k-α-O-Participación* para correspondencias) si, para todo votante v potencial y para todo perfil p, es falso que $f_k(p)$ k-α-O_v $f_k(p+v)$.

b) Decimos que la k-correspondencia f_k cumple ***k-β-Participación para correspondencias según el orden entre conjuntos O*** (o *k-β-O-Participación* para correspondencias) si, para todo conjunto de votante votantes potenciales unánime v y para todo perfil p, es falso que $f_k(p)$ k-β-O_v $f_k(p+v)$.

c) Decimos que la k-correspondencia f_k cumple ***k-γ-Participación para correspondencias según el orden entre conjuntos O*** (o *k-γ-O-Participación* para correspondencias) si, para todo conjunto de votante votantes potenciales unánime v y para todo perfil p, es falso que $f_k(p)$ k-γ-O_v $f_k(p+v)$.

La pregunta natural a hacerse en este punto es si los resultados obtenidos en la Proposición 3.13, relativos a la manipulación por abstención en correspondencias de votación Condorcet, podrían extenderse a este contexto. En este momento sólo podemos conjeturar que la extensión es válida si adoptamos la versión débil. Pero la confirmación de esta conjetura y la búsqueda de resultados de imposibilidad más fuertes es una línea de investigación que nos proponemos abordar en el futuro.

Un último comentario antes de pasar a la siguiente sección. Los órdenes de deseabilidad entre k-conjuntos aquí definidos tienen sentido (o están pensados especialmente) cuando de cada k-conjunto de alternativas elegidas inicialmente va a obtenerse finalmente un único elemento como, por ejemplo, en el caso de la elección de k candidatos seleccionados como nominados para un premio, de los que luego hay que determinar el único ganador. Ahora bien, como ya se señalaba al comienzo de esta sección al introducir el concepto de las reglas de k-nombres, esa es sólo una de las posibles aplicaciones, no la única. Otra aplicación sería el caso donde lo que se elige finalmente es precisamente un comité de k personas que es el comité vencedor como, por ejemplo, en la selección de un comité de empresa. En este último caso, no tendría mucho sentido, por ejemplo, el orden *k-Opt*, que dice que un comité es mejor que otro si el mejor de los miembros del primero es preferido al mejor de los miembros del segundo, pues no se han definido las preferencias dentro del propio conjunto seleccionado pero, sin embargo, sí lo tendría el orden *k-DF*, que dice que un comité es mejor que otro si cualquiera de los miembros del primero es preferido a cualquiera de los del segundo, dado que esa comparación sí es posible a partir de la información contenida en el propio perfil de preferencia individuales.

4.4. Consistencia Externa y Correspondencias de Votación Condorcet.

Volvamos al estudio de las correspondencias de votación Condorcet y recordemos las consecuencias de incumplir la propiedad de Participación Positiva. Al analizar tal incumplimiento por parte de una correspondencia de votación nos encontramos con una doble interpretación. Por una parte, tal y como ya hemos indicado en el Capítulo 3, se está produciendo una situación anómala para el votante que ve como al votar a su candidato favorito consigue que éste deje de ser ganador, con lo cual hubiese sido más beneficioso para él abstenerse. Pero también podemos hacer una interpretación desde el punto de vista del candidato, y es justamente esta perspectiva en la que nos centraremos en esta sección.

En concreto, siempre que se incumple la propiedad de Participación Positiva, estamos diciendo que existe un candidato ganador x que, aunque favorecido por la introducción de un nuevo votante que lo tiene como favorito, en realidad es perjudicado por este voto adicional pues, como consecuencia, deja de ser ganador, permitiendo que otro u otros candidatos menos favorecidos por ese voto adicional se conviertan o mantengan como ganadores. En esta línea, la paradoja de la abstención fuerte positiva puede verse como una ausencia de monotonía en los candidatos frente a la introducción de nuevos votantes.

Esta segunda interpretación hace que propiedad de Participación Positiva tenga relación con las propiedades de Consistencia Externa (Young, 1975), cuyo cumplimiento asegura la consistencia del conjunto de ganadores ante la agregación de electorados, pudiéndose ver el fallo de la Participación Positiva como un fallo de Consistencia Externa.

Es precisamente el análisis de las propiedades de Consistencia Externa, más en concreto, el intento de extensión del teorema de Young y Levenglick (1978) sobre el incumplimiento de la propiedad de Consistencia Externa de Young en correspondencias de votación Condorcet lo que constituye la parte esencial de esta sección.

4.4.1. Consistencia Externa.

Las propiedades de Monotonía y Participación definidas en el Capítulo 2 hacen referencia a lo que se entiende como racionalidad individual, en el sentido de que suponen que, si el método de votación que se utiliza las satisface, los cambios en el resultado de la elección estarán en consonancia o, lo que es lo mismo, serán consistentes, con los cambios que se efectúen en las preferencias individuales de los votantes. Mientras que, por lo tanto, el incumplimiento de estas propiedades supondrá la aparición de cambios inesperados y poco deseables en los resultados de la elección como respuesta a ciertas modificaciones en el perfil de preferencias.

En ocasiones, sin embargo, esos resultados contraintuitivos en la elección surgen de la consideración de distintas subdivisiones del conjunto total de votantes, aún cuando el perfil de preferencias permanece inalterado. En este caso, los posibles cambios en los resultados no se producen ya como consecuencia de cambios dentro del propio perfil de preferencias, sino como respuesta a distintas combinaciones entre distintas divisiones del mismo.

Por ejemplo, supongamos que existen varios grupos de votantes que tienen que decidir sobre un mismo conjunto de candidatos. En este caso, el hecho de exigir cierto criterio de invarianza entre perfiles en el resultado de la elección significaría que, incluso cuando los grupos sean diferentes, sería razonable esperar una cierta conformidad en su comportamiento de elección por separado y cuando se combinaran, al menos, en determinados contextos específicos.

Más en concreto, las cuestiones que nos planteamos ahora son: ¿Qué efectos debería tener la partición del conjunto total de votantes en los resultados del la elección? O, dicho de otro modo, ¿podemos esperar elecciones consistentes ante cambios en el electorado y, más en particular, ante la agregación o combinación de distintos electorados? De esta forma, en lugar de prestar atención a la racionalidad individual, como en el caso de las propiedades de Monotonía y Participación, lo que nos estamos preguntando es si los métodos de votación mantienen una cierta racionalidad colectiva cuando se agregan o particionan grupos de votantes, es decir, nos estamos preguntando por el cumplimiento de las propiedades de Consistencia Externa.

Entre las distintas propiedades de invarianza entre perfiles que se pueden definir, la más conocida es, sin duda, la Consistencia Externa de Young (1974).

Definición 4.14 (Consistencia Externa de Young)

Se dice que una correspondencia de votación f cumple la ***Propiedad de Consistencia Externa de Young*** (***CEXY***) siempre que, para todo par de situaciones distintas (X, p_1) y (X, p_2), que tengan algún elegido en común, se verifica que $f(X, p_1 + p_2) = f(X, p_1) \cap f(X, p_2)$.

Por lo tanto, el cumplimiento de esta propiedad de Consistencia Externa de Young establece que, si los distintos grupos por separado tienen algunos ganadores en común, esos mismos ganadores deberían ser los elegidos cuando todos los grupos se reúnen.

Una propiedad más débil surge cuando permitimos que los ganadores del electorado conjunto puedan estar también contenidos en la intersección de los electorados:

Definición 4.15 (Consistencia Externa Débil-Inclusiva)

Se dice que una correspondencia de elección social f satisface la ***Propiedad de Consistencia Externa Débil-Inclusiva*** (***CEXDI***) si y sólo si, para cualquier par de situaciones (X, p_1) y (X, p_2), donde $f(X, p_1) \cap f(X, p_2) \neq \emptyset$, se cumple que $f(X, p_1) \cap f(X, p_2) \subseteq f(X, p_1 + p_2)$.

Así pues, ahora, esta propiedad establece que las elecciones hechas por el electorado global incluyan al menos todas las alternativas elegidas por los dos grupos cuando actúan por separado, aunque en este caso cabe la posibilidad de que también se incluyan entre los ganadores, candidatos que no fueron elegidos conjuntamente por los distintos electorados.

Un nuevo debilitamiento de la propiedad de Consistencia Externa Débil-Inclusiva lo constituye la siguiente propiedad:

Definición 4.16 (Consistencia Externa Débil)

Una correspondencia de elección social f satisface la ***Propiedad de Consistencia Externa Débil*** (***CEXD***) si y sólo si, para cualquier par de situaciones (X, p_1) y (X, p_2), donde $f(X, p_1) \cap f(X, p_2) \neq \emptyset$, se cumple que $f(X, p_1) \cap f(X, p_2) \cap f(X, p_1 + p_2) \neq \emptyset$.

Ahora, si el conjunto de votantes está dividido en varias partes que eligen entre el mismo conjunto de candidatos, debería ocurrir que, si independientemente eligen candidatos ganadores comunes, cuando se agregan debe ser de entre dichos candidatos, y no otros, de donde salgan los ganadores en la población global. Cabe destacar, sin embargo que, en caso de que la intersección de ganadores entre las distintas poblaciones no dé resultado alguno, esta propiedad permitiría, dada su definición, que resultaran vencedores cualesquiera candidatos.

Evidentemente, todo método que verifique Consistencia Externa satisface también Consistencia Externa Débil-Inclusiva y Consistencia Externa Débil.

Dadas las definiciones anteriores, queda claro que si los supuestos de Consistencia Externa no se respetan y, por lo tanto, la subdivisión del conjunto de votantes tiene efectos inesperados en el resultado, esto podría ser utilizado en beneficio de algún individuo o conjunto de ellos que fueran capaces de influir en las subdivisiones que se efectuaran (de ahí, por ejemplo, que el dibujo de las fronteras de los distritos electorales tenga una importancia política relevante) y, de este modo, estaríamos ante un nuevo tipo de manipulación que no resulta muy atractiva.

4.4.2. Consistencia Externa de Young en Métodos Posicionales y Condorcet.

En relación a esta propiedad también existen, como en el caso de Participación, resultados importantes que afectan a las familias de métodos de votación Posicionales y Condorcet.

Proposición 4.7 (Young, 1975)

Una correspondencia de Elección Social es Posicional si y sólo si satisface, Neutralidad, Continuidad y Consistencia Externa.

Así pues, el axioma de Consistencia Externa supone un nuevo punto a favor en la particular lucha entre las familias de métodos de votación Posicionales y Condorcet, puesto que sirve para caracterizar a los primeros, mientras que, como veremos en la Proposición 4.8 a continuación, excluye a los métodos Condorcet.

De hecho, es un punto a favor también frente a los métodos Posicionales con Descarte que, según Smith (1973), no verifican la propiedad de Separabilidad (que también hace referencia a cierta estabilidad y consistencia en los resultados agregados) y, por lo tanto, puesto que esta propiedad puede también definirse a partir de la propiedad de Participación y Consistencia Externa de Young, incumplen esta última propiedad.

En relación a los métodos Condorcet, la incompatibilidad de los mismo con las propiedades de Consistencia Externa y Participación aparece recogida en los resultados contenidos en las secciones *a*, *b* y *c* de la siguiente proposición, establecidos respectivamente en Young y Levenglick (1978), Moulin (1988a) y Pérez (1995 y 2001).

Proposición 4.8

a) Ninguna correspondencia de votación Condorcet satisface la propiedad Consistencia Externa.
b) Ninguna función de votación Condorcet satisface la propiedad de Participación.
c) Ninguna correspondencia de votación Condorcet satisface la propiedad de CV-Participación.

A partir de estos resultados en relación a las correspondencias Condorcet, cabe preguntarse si existe alguna relación entre las propiedades de Participación y Consistencia Externa. En este sentido, si bien ya se podría considerar la CV-Participación como un primer debilitamiento de la Consistencia Externa (al mismo tiempo que, como ya vimos en el capítulo anterior, es una primera traslación de la propiedad de Participación al contexto de las correspondencias de votación), es con la propiedad de Participación Positiva donde la relación entre estas dos propiedades resulta más evidente.

Relación entre Participación Positiva y Consistencia Externa

Sin entrar en excesivas formalidades, la relación entre estas dos propiedades surge de que la propiedad de Participación Positiva, tal y como se ha definido, y ante el supuesto de Unanimidad puede verse, no sólo como un debilitamiento de la CV-Participación sino, a su vez, como un debilitamiento extremo de la Consistencia Externa cuando alguna de las poblaciones agregadas tiene un electorado uniforme, es decir, uno donde todos sus votantes tienen la misma ordenación de preferencias.

Más en concreto, la Participación Positiva requiere que, si un candidato x es elegido en una determinada situación inicial, (X, p), continuará siéndolo si añadimos a dicha situación un conjunto de votantes unánime v que lo tiene como favorito.

Pues bien, si dada una situación inicial (X, p), añadimos un conjunto de votantes v (todos ellos con las mismas preferencias y con x como favorito que, por la condición de unanimidad, es el ganador de esa nueva situación, $x \in f(X, v)$), si x ya era ganador en la situación inicial, $x \in f(X, p)$, está claro que el resultado en la nueva situación agregada también debería incluir ese candidato, es decir, $f(X, p) \cap f(X, v) \subseteq f(X, p+v)$.

Así pues, la relación entre estas dos propiedades de Participación Positiva y Consistencia Externa se traduce en que, si una correspondencia de votación no verifica la propiedad de Participación Positiva, además de incurrir en la correspondiente Paradoja de la Abstención también se verá afectada por inconsistencias en la agregación de electorados al incumplir la propiedad de Consistencia Externa.

4.4.3. Extensión del Teorema de Young y Levenglick (1978).

La propiedad de Consistencia de Young trata de poner de manifiesto la necesidad de una coherencia entre los resultados obtenidos en poblaciones diferentes, cuando éstas son agregadas. Y, como hemos visto, la Participación Positiva (*PP*os) es en realidad un debilitamiento radical de la Consistencia de Young porque en la *PP*os el electorado añadido la nueva situación, *v*, tiene preferencias unánimes con *x* como el candidato favorito que, además es, por tanto, un candidato Pareto dominante.

La *PP*os, al ser un debilitamiento tan grande de la Consistencia Externa, no es ya incompatible con el principio de Condorcet. Un ejemplo es la correspondencia MaxMin puesto que dicha correspondencia de votación, para toda situación, satisface el principio de Condorcet y, al mismo tiempo, la *PP*os.

Partiendo de los resultados anteriores, y con el objetivo es extender lo más posible el resultado de imposibilidad de Young y Levenglick (1978) para correspondencias de votación Condorcet, el camino más lógico es considerar la posibilidad de encontrar debilitamientos más fuertes de esa propiedad de Consistencia de Young (pero no tanto como *PP*os) que sean también incompatibles con el cumplimiento del principio de Condorcet.

En este mismo sentido, Jimeno (2003) ya definía nuevas propiedades de Consistencia Externa, estableciendo la condición de que el electorado agregado a una determinada situación inicial tuviera como candidato elegido un candidato con ciertas características que le hicieran un candidato atractivo. En particular, para el caso de que en electorado agregado existiera un candidato que fuera un candidato C2-dominante (recordemos que un candidato es C2-Dominante si vence por mayoría en la comparación por pares a cualquier otro candidato), establecía que ninguna correspondencia de votación Condorcet satisface la propiedad de Consistencia C2-Débil lo que significa que, para el caso en el que en el electorado agregado exista un candidato ganador *x* que es C2-dominante, ese mismo candidato *x* continuará siendo ganador en el situación agregada, aunque no tiene porqué ser el único ganador.

Se mantiene así, para este debilitamiento de la propiedad de Consistencia de Young, el resultado de imposibilidad de Young and Levenglick (1978). Por otro lado, en el caso de que en alguno de los electorados a agregar tenga un candidato Pareto Dominante, también obtiene que existe alguna correspondencia Condorcet, de nuevo el método Maximin, que sí verifica esta nueva propiedad de Consistencia Pareto-Externa Débil y, por lo tanto, no es inconsistente en el sentido del Young.

Siguiendo este mismo camino, el siguiente paso natural sería buscar nuevos debilitamientos de la propiedad de Consistencia requiriendo que el electorado añadido tenga un candidato especial, muy bueno, pero no tanto como un candidato Pareto Dominante, de modo que el teorema de imposibilidad para todas las correspondencias de votación Condorcet se mantenga.

Definición 4.17(Candidato Casi Pareto Dominante y Consistencia Casi Paretiana)

a) Un candidato x es ***Casi Pareto Dominante*** **(*CPD*)** en la situación (X, p) si x es el candidato más preferido para todo votante, excepto quizás en un votante v_x, y x es el segundo candidato más preferido para el votante v_x.

b) Una correspondencia de votación f satisface la propiedad de ***Consistencia Casi Paretiana*** **(*CCP*)** si, en cualquier par de situaciones, (X, p_1) y (X, p_2), donde el candidato x es Casi Pareto Dominante en la situación (X, p_2),

$$x \in f(X, p_1) \text{ implica que } x \in f(X, p_1+p_2).$$

En otras palabras, si el candidato x es elegido en el perfil p_1, y es un candidato Casi-Pareto Dominante en el perfil p_2, entonces x seguirá siendo elegido cuando los dos perfiles se agregan en un único electorado.

Para la definición de *Consistencia Casi Paretiana* podríamos obtener dos nuevas variantes:

Definición 4.18(Consistencia Casi Paretiana Débil y Unitaria)

a) Una correspondencia de votación f satisface la propiedad de ***Consistencia Casi Paretiana Débil*** **(*CCPD*)** si, en cualquier par de situaciones, (X, p_1) y (X, p_2), donde el candidato x es Casi Pareto Dominante en la situación (X, p_2),

$$\{x\} = f(X, p_1) \text{ implica que } x \in f(X, p_1+p_2).$$

b) Una correspondencia de votación f satisface la propiedad de ***Consistencia Casi Paretiana Unitaria* (*CCPU*)** si, en cualquier par de situaciones, (X, p_1) y (X, p_2), donde el candidato x es Casi Pareto Dominante en la situación (X, p_2),

$$\{x\} = f(X, p_1) \text{ implica que } \{x\} = f(X, p_1 + p_2).$$

Es obvio que, para $m \geq 3$ votantes, un candidato Casi-Pareto Dominante es un candidato Condorcet y, al mismo tiempo, un candidato C2-dominante. Y es también obvio que, en correspondencias de votación que eligen como único ganador, un candidato Casi Pareto Dominante cuando existe (entre ellas, todas las correspondencias de votación Condorcet), la Consistencia Externa implica *CCP* (y, por tanto, también cualquiera de las dos variantes menos fuertes *CCPD*, *CCPU*) y ésta, a su vez, implica *PPos*.

La Figura 4.3 a continuación presenta esas implicaciones lógicas entre las distintas definiciones de Consistencia Externa definidas.

Escala lógica de las propiedades de Consistencia Externa.

Propiedades Fuertes | *Propiedades Débiles*

$$\textbf{\textit{CEXY}} \longrightarrow \textbf{\textit{CCP}} \longrightarrow \textbf{\textit{CCPD}} \longrightarrow \textbf{\textit{CCPU}} \longrightarrow \textbf{\textit{PPos}}$$

Figura 4.3 Propiedades de Consistencia Externa

Pues bien, si para las dos versiones más débiles de Consistencia Casi Paretiana, *CCPD* y *CCPU*, existe una correspondencia de votación Condorcet que las cumple de manera obvia, (f_{E-T}), el siguiente es un resultado de imposibilidad que extiende el resultado clásico de Young and Levenglick (1978).

Proposición 4.9

Ninguna correspondencia de votación Condorcet satisface la propiedad de Consistencia Casi Paretiana, ***CCP***.

Demostración***:***
Sea f una correspondencia de votación Condorcet, y (X, p) una situación con $X = \{x_1, x_2,\dots, x_n\}$ y p el siguiente perfil simétrico de votantes con $m = n \geq 4$:

1 votante: $x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1} > x_n$
1 votante: $x_2 > x_3 > \dots > x_n > x_1$
1 votante: $x_3 > x_4 > \dots > x_1 > x_2$
...
1 votante: $x_{n-1} > x_n > x_1 > \dots > x_{n-2}$
1 votante: $x_n > x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1}$

La matriz comparación es M_p:

	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
x_1		n-1	n-2		2	1
x_2	1		n-1		3	2
x_3	2	1			4	3
...						
x_{n-1}	n-2	n-3	n-4			n-1
x_n	n-1	n-2	n-3		1	

Por simetría, y sin pérdida de generalidad, asumamos que el candidato x_1 es elegido, $x_1 \in f(X, p)$. Supongamos ahora que añadimos un electorado nuevo con n-1votantes, n-2 de ellos con idénticas preferencias $x_1 > x_n > x_2 >...> x_{n-1}$, y el último con preferencias $x_n > x_1 > x_2 >...> x_{n-1}$.

Es fácil ver que en el electorado combinado, con 2n-1 votantes, el candidato Condorcet es x_n, porque la nueva matriz de comparación es $M_{p+p'}$:

	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
x_1		2n-2	2n-3		n+1	n-1
x_2	1		2n-2		n+2	2
x_3	2	1			N+3	3
...						
x_{n-1}	n-2	n-3	n-4			n-1
x_n	n	2n-3	2n-4		N	

Dado que f es una correspondencia de votación Condorcet, el candidato x_1 no es elegido en el electorado combinado. Por tanto, f no satisface la propiedad de *CCP*. □

Este nuevo resultado de incompatibilidad de los métodos Condorcet con las propiedades de Consistencia Externa es un resultado fuerte, porque supone poner de manifiesto que, si en un proceso de elección se agregan dos poblaciones en las que existe un candidato ganador que en una de las poblaciones es candidato Condorcet y domina en el sentido de Pareto a todos los demás (salvo quizás a uno), puede hacer que dicho candidato deje de ser ganador.

Por tanto, los métodos Condorcet no son consistentes frente a la agregación de electorados en condiciones en las que para una de las poblaciones existe un candidato Condorcet que sea Casi Pareto Dominante (que representa una condición suficiente para ser único candidato ganador).

Merece la pena señalar también que, dado que no existe ningún concepto de dominación entre ser un candidato Casi Pareto Dominante y ser un candidato Pareto Dominante, el resultado de extensión en la Proposición 4.9 es un tipo de resultado límite en el proceso de extender el resultado de imposibilidad de Young sobre correspondencias de votación Condorcet y, por tanto, no existe una extensión más allá.

4.5. Conclusiones y comentarios adicionales.

A lo largo de este capítulo se han completado algunas cuestiones pendientes relacionadas con la investigación desarrollada en el Capítulo 3 acerca de la problemática de la Participación y la extensión del Teorema de Moulin (1988a) al contexto de las correspondencias de votación Condorcet.

A lo largo de la Sección 4.2 se ha mostrado, en primer lugar, en el apartado 4.2.1 que, en cuanto a resultados de imposibilidad para correspondencias de votación Condorcet referentes a las propiedades de Participación descritas en el Capítulo 3, no existen otros que los allí recogidos (resumidos en los tres primeros apartados de la Proposición 4.1) y que afectan a las propiedades *PCV*, *POpt* y *PPes*, o los que se deducen de ellos de manera obvia (por implicar de manera directa a estas tres propiedades y, por tanto, ser más fuertes), y que, en consecuencia, afectarán a las propiedades *PPesFuer*, *POptSem*, *POptCua*, *P-AVBU*, *P-AVB* y *PoptEs*.

Por su parte, la Proposición 4.2 demuestra que, *para las propiedades PPosEs y P-TVBU, ya existen correspondencias de votación Condorcet, en concreto,* f_{MMLEX} *y* $f_{E\text{-}T}$ *respectivamente, que sí las cumplen y, por tanto, con este resultado queda completado el análisis de posibilidad-imposibilidad en relación a las propiedades de Participación en correspondencias de votación Condorcet*, que aparece recogido de manera gráfica en la Figura 4.1.

Como conclusión de esta sección, en el apartado 4.2.2 ese explora, de manera no exhaustiva, la incidencia, tanto en las propias correspondencias Condorcet, como en alguna de las más importantes correspondencias Posicionales, del cumplimiento e incumplimiento de las propiedades de Participación. Los resultados aparecen recogidos en la Proposición 4.3, *que* *establece que la correspondencia MaxMin cumple PPosSem pero no PPosCua* y la Proposición 4.5 *que concluye que todas las correspondencias de votación Posicionales Propias cumplen POptEs; que todas las correspondencias de votación Posicionales cumplen POptCua; que Pluralidad cumple PPosEs pero incumple PPesFuer; y que Antipluralidad incumple PPosEs y PPesFuer*. Por último, la Tabla 4.1 resume todos los resultados obtenidos.

La Sección 4.3 se sitúa en un nuevo contexto, el de las llamadas k-funciones, es decir, reglas de votación que, en cada situación, eligen como resultado final un número específico de k alternativas o candidatos ganadores.

Dentro de este contexto, en los apartados 4.3.1 y 4.3.2se extienden los conceptos de Candidato y Función Condorcet, Participación y Manipulación por Abstención (con la problemática que ello conlleva), y en la Proposición 4.6 se recoge como resultado principal que, *toda k-función f_k que sea k-Condorcet es k-Manipulable según el orden Opt, y que toda k-función f_k que sea k-Condorcet y cumpla Traslación Invariante es k-Manipulable según el orden Pes.*

En el apartado 4.3.3 se definen, de modo natural, nuevas k-funciones, las correspondientes a los métodos de votación Posicionales y se explora su cumplimiento para algunas propiedades de Participación.

La Sección concluye con el apartado 4.3.4, donde se definen los conceptos de k-correspondencia y correspondencia k-Condorcet, es decir, se aplica a correspondencias los conceptos definidos previamente, analizando la problemática que estos nuevos conceptos soportan. A partir de esas definiciones, y en un intento de extender los resultados obtenidos en la Proposición 3.13 a este nuevo contexto de correspondencias k-Condorcet, se observa que, puesto que ahora los resultados a comparar son conjuntos de conjuntos de k-elementos, ya no son suficientes los órdenes entre conjuntos definidos en el Capítulo 3, sino que se hace necesario extender la ordenación entre conjuntos a k-órdenes entre familias de k-conjuntos.

En este sentido, en la Definición 4.12 se proponen tres posibles extensiones de un orden O a un orden k-O entre familias de k-conjuntos: Versiones α, β, y γ para, a partir de ellas, en la

Definición 4.13, definir la propiedad de Participación en este nuevo contexto (de manera análoga se puede definir la Manipulación mediante Abstención).

Con todos esos elementos la respuesta a la pregunta de si los resultados obtenidos en la Proposición 3.13 del Capítulo 3 podrían extenderse a este nuevo contexto de *k*-correspondencias Condorcet es que, en este momento, sólo podemos conjeturar que la extensión es válida si adoptamos la versión débil, γ. Pero la confirmación de esta conjetura y la búsqueda de resultados de imposibilidad más fuertes es una línea de investigación que nos proponemos abordar en el futuro.

El capítulo concluye con la Sección 4.4 donde, a partir de la relación existente entre la propiedad de Consistencia Externa de Young y la propiedad de Participación Positiva se obtiene el resultado de imposibilidad recogido en la Proposición 4.9 que nos dice que *ninguna correspondencia de votación Condorcet cumple la propiedad de Consistencia Casi Paretiana, CCP*, es decir, no existe ningún método consistente con el principio de Condorcet que mantenga la coherencia en la agregación de electorados incluso cuando en una población tenemos un candidato que Pareto Domina a todos los demás excepto quizás en un votante para el que es el segundo candidato más preferido. Se trata pues, de un resultado de incumplimiento fuerte en la Consistencia Externa, si tenemos en cuenta que la condición de Casi Pateto Dominación es un refinamiento del principio de Condorcet. De este modo se obtiene una verdadera extensión del Teorema de Young y Levenglick (1978) para todas las correspondencias de votación Condorcet.

CAPÍTULO 5. UN ESQUEMA GENERADOR DE MÉTODOS DE VOTACIÓN

5.1. Introducción.

El diseño de un sistema electoral y la elección correspondiente de un método de votación adecuado es fundamental en cualquier proceso colectivo de toma de decisiones. Afortunadamente, para dicha elección no faltan alternativas adecuadas, dada la amplia variedad de mecanismos alternativos que agregan las preferencias individuales en forma de un resultado social.

El problema es que, a partir del teorema de Arrow, ya sabemos que cualquier método de votación que se aplique sobre unas preferencias de los votantes no restringidas tiene necesariamente algunos defectos serios y, por tanto, debemos elegir siempre entre métodos alternativos "imperfectos".

Por otro lado, y partiendo de una guía teórica en conflicto para ayudar a seleccionar la alternativa con menor número y relevancia de defectos (a cada contexto concreto), un sistema electoral tiene que intentar equilibrar múltiples objetivos, algunos de los cuales ya han sido abordados anteriormente: establecer la legitimidad del resultado, favorecer la participación de los votantes, desalentar la manipulación.

Tener en cuenta todos estos elementos no es tarea fácil, lo que sí parece claro es que, cuando las preferencias de los votantes son suficientemente homogéneas, una amplia variedad de sistemas de votación llevan a elecciones similares, lo cual significa que escoger entre distintos sistemas de votación no tiene mucha importancia.

Por desgracia, tal homogeneidad en las preferencias no es habitual y por eso tampoco es complicado encontrar situaciones (como la descrita en el Capítulo 1 sobre la elección del Presidente de los Estados Unidos) en las que se observa que, frente a un mismo perfil de preferencias, el resultado obtenido por distintos métodos es muy diferente.

Así, las dificultades en la agregación de preferencias aparecen en el caso de existir una población con falta de consenso, que debe decidir sobre cuales deberían ser los objetivos específicos del método de votación elegido. Y es en esta situación donde la elección de un sistema u otro puede generar una gran diferencia, donde las aparentemente menores discrepancias entre los distintos métodos pueden influenciar directamente el resultado y donde Teoría de la Elección Social, y la Teoría de las Votaciones en particular, centra gran parte de sus esfuerzos investigadores.

Aunque las dificultades señaladas anteriormente parecen verse refrendadas cuando observamos la gran cantidad de resultados de imposibilidad de los que, como hemos visto, la teoría está repleta, y aunque ciertamente de partida la elección de cualquier método concreto de votación está sujeta a una decisión imperfecta, en este capítulo se pretende, mediante la presentación y exposición de lo que hemos denominado **Modelo Unificador basado en distancias**[7], mostrar la posibilidad de contar con una esquema generador de métodos de votación que, entre otras consideraciones adicionales, ponga de manifiesto las similitudes subyacentes a gran parte de los distintos métodos conocidos, y que contribuya con ello a un mejor entendimiento de los algoritmos que los definen y de algunas de sus propiedades más relevantes. Aún más, y dentro del mismo contexto, este esquema ofrece la posibilidad de obtener y analizar nuevos métodos o familias de métodos de votación, apareciendo así como otro de los posibles instrumento en la clarificación y búsqueda de métodos de votación *adecuados*.

Con este propósito, en la Sección 5.2 se presenta la idea general detrás de un Esquema Generador para la definición y obtención de distintos métodos de votación. A continuación,

---

[7] Una primera aproximación a este modelo se encuentra en García, E.; Jimeno, JL. y Perez, J. (2005) Two unifying frameworks in voting theory. En Concepción Maroto et al (Ed.): *Proceeding Book. A EURO conference for young OR researchers and practicioners (3º edition),* 345-356

en la Sección 5.3 se presenta ya específicamente el esquema aquí desarrollado y denominado Modelo Unificador basado en distancias, que es una extensión del análisis presentado en Pérez (1991) donde, siguiendo a autores como Marcotorchino y Michaud (1979), Lerer y Nitzan (1985) o Campbell y Nitzan (1986), entre otros, se trata de establecer un esquema unificado como marco conceptual dentro del cual se situarían, de forma estructurada, distintos métodos de votación obtenidos a partir de la concreción de los parámetros básicos de dicho esquema. Se muestra además, no sólo el valor teórico de este Modelo Unificador, dada la posibilidad de obtener a partir del mismo algunos de los métodos de votación conocidos, sino también su posible valor práctico, al permitirnos determinar algún nuevo método y familia de métodos, y realizar una nueva clasificación de los métodos de votación al establecerse nuevas relaciones entre ellos. Por último, en la Sección 5.4 se presentan las conclusiones y algunas consideraciones adicionales.

5.2. Un Esquema Generador para la obtención de métodos de votación.

Existe una gran diversidad de cuestiones que cabría preguntarse en cualquier análisis acerca de los múltiples sistemas de votación existentes, sus ventajas y sus inconvenientes.

Puesto que, además, la Teoría de la Elección Social se ha visto muy influida por los resultados negativos que en forma de teorema se han obtenido (y recogidos ya en los Capítulos 1 y 2), algunos investigadores han centrado su atención en el establecimiento de un conjunto de criterios que pudiesen ser considerados aceptables, al menos por su parte, y que les permitían caracterizar y clasificar distintos sistemas existentes.

Si bien a la hora de considerar como aceptable un determinado método de votación la respuesta va a depender, en mayor o menor medida, de la situación o contexto concreto en que se vaya a utilizar, en esta primera aproximación al problema de intentar establecer criterios relevantes a tener en cuenta en la elección de un método de votación, el punto de partida común podría ser, en el espíritu de propio Marqués de Condorcet (pionero en este tipo de análisis), el supuesto de que *en toda elección existe alguna verdad subyacente que debe ser descubierta* y que, por lo tanto, *cualquier método de votación debe tratar de encontrar al candidato o conjunto de candidatos ganadores que la ponga de manifiesto*.

Se trataría pues, de sugerir una consideración más modesta, apartándonos de la búsqueda del sistema de votación perfecto, y centrándonos en la obtención de métodos que, al menos, sean capaces de generar siempre algún tipo de consenso sobre cual debe ser el ideal a perseguir, es decir, sobre cual es el tipo de situación en la que unánimemente todos los votantes estarían de acuerdo en aceptar, conforme a sus preferencias, a un candidato o grupo de candidatos como representantes de las preferencias sociales.

De este modo aunque, en general, los métodos de votación han sido definidos directamente mediante algoritmos (en ocasiones complejos), y sólo investigaciones posteriores han permitido identificar algunas similitudes entre ellos, el hecho de exponer, como se hará a continuación, un punto de partida común a muchos de ellos, a partir del cual definir y poner de manifiesto estas similitudes resulta, por tanto, enriquecedor.

Y no sólo porque facilita una mejor comprensión de los propios métodos en términos de los algoritmos que los definen, sino porque sirve también para clarificar sus objetivos y, potencialmente, para obtener métodos similares con los que, en algunos casos, pueden compartir buenas propiedades pero que, en todo caso, requieren de una misma complejidad, dando lugar a la creación de familias de métodos de votación construidas en torno a esos mismo algoritmos que los definen.

En este sentido, la utilización de un Esquema Generador nos ofrece una nueva perspectiva de análisis centrada en la construcción de métodos de votación a partir de un punto de partida común, lo cual permite, además, clarificar el análisis de las propiedades específicas de cada uno de ellos o, más en general, de un conjunto o familia de los mismos.

En concreto, el punto de partida común que asumiremos existe en la construcción de una regla o método de votación, es el de aceptar la existencia de un consenso colectivo subyacente sobre lo que constituye un "favorito en las preferencias sociales" (es decir, un candidato o grupo de candidatos que es admisible como ganador de pleno derecho con independencia de las preferencias reales de los votantes), y que vendrá definido, evidentemente, a partir únicamente de la información contenida en el propio perfil de preferencias de los votantes.

Si tal candidato o grupo de candidatos *ideal* se encontrase en toda situación (*X, p*), está claro que no tendría sentido preguntarse por un procedimiento de elección. El problema surge cuando no en toda situación lo encontramos (más concretamente cuando, en realidad, en raras situaciones existe). Es entonces cuando nos preguntamos por un método de votación y, en principio, y así lo proponemos, cuando tiene sentido asumir que el consenso sobre lo aceptado como válido o ideal se traslada a la elección de aquel candidato o grupo de candidatos que se encuentren más cerca de dicho *ideal*.

Dicho de otro modo, el objetivo básico del Esquema Generador aquí presentado es poner de manifiesto y exponer, de un modo detallado que, puesto que la idea de consenso parece estar detrás de todo método de votación, es posible *unificar* a algunos de ellos a través de un modelo que tiene como parámetros centrales, por un lado, la definición de un *criterio consensuado* sobre lo que constituye el candidato o candidatos ideales y, por otro, y para aquellas situaciones en las que tal criterio no se satisfaga, el establecimiento como mejor candidato o conjunto de candidatos, de aquél o aquellos que estén *más cerca* de satisfacerlo.

Por último, es de destacar que el objeto de estudio de este capítulo pertenece a la intersección del campo de la Elección Social y el campo de la Investigación Operativa. Un método de votación es (aparte de los posibles aspectos estratégicos) un procedimiento de agregación de preferencias y, por tanto, formalmente análogo a un proceso de decisión multicriterio donde las preferencias de los votantes se corresponden con los criterios de evaluación.

De hecho, muchos estudios en la literatura de la Decisión Ordinal Multicriterio hacen uso de la terminología, resultados e intuiciones de la literatura de la Elección Social y de la Teoría de las Votaciones[8].

[8] Véase Marchant (2003) y Arrow y Raynaud (1986) para un estudio de la relación entre estos campos, y Pérez (1991), Barba-Romero y Pomerol (1997), Pérez y Barba-Romero (2000) y Bouyssou et al. (2003), para estudios en el contexto de la decisión multicriterio que hace uso de la metodología y las pistas de la Teoría de las Votaciones.

5.3. Modelo Unificador basado en la utilización del concepto de distancia.

El Esquema Generador que se desarrolla en este capítulo tiene un punto de partida similar al abordado, entre otros, en Nitzan (1981), Lerer y Nitzan (1985), Campbell y Nitzan (1986), Nurmi (2004), o Meskanen y Nurmi (2004), pues en todos ellos el análisis se centra, como aquí, en un subconjunto de métodos que tienen en común la idea de minimizar una determinada distancia.

Partiendo de este elemento común, en concreto, en el Esquema Generador aquí propuesto, al que denominamos ***Modelo Unificador basado en distancias***, los métodos de votación se van a caracterizar en términos de un *criterio consensuado de ideal* y de una *distancia a ese criterio*, de modo que el uso de un determinado método de votación suponga reducir al mínimo tal distancia entre el criterio consensuado de ideal establecido y el observado.

No obstante, y a diferencia de todos estos trabajos mencionados, en este Modelo Unificador, que sigue a Pérez (1991), no se requiere del uso de toda la información contenida en perfil completo de preferencias, sino simplemente de la información contenida en alguna de las matrices asociadas a un perfil (como, por ejemplo, la matriz de comparación o la matriz de victorias). Y, por otro lado, la cuantificación de la proximidad al criterio consensuado de ideal viene determinada realmente, en nuestro caso, por lo que entendemos normalmente por una métrica o seudométrica.

De este modo, que será formalizado a continuación, este Modelo Unificador está formado por dos elementos esenciales: un determinado *conjunto base de matrices* (el conjunto de matrices de referencia), que son especiales por su estructura, puesto que caracterizan la idea de un determinado criterio consensuado de ideal; y una *distancia o seudodistancia* concreta, en este caso definida entre matrices, mediante la que se cuantificará la proximidad a dicho criterio.

Se trata entonces, a partir de esos elementos, de analizar la posibilidad de diseñar métodos de votación mediante un procedimiento que cuantifica la comparación entre una situación dada y un conjunto de situaciones de referencia, cuando dicha cuantificación se lleva a cabo mediante el uso de una distancia (o seudodistancia).

5.3.1. *Definición del Modelo.*

Definamos formalmente los dos conceptos básicos de este Modelo Unificador que como sabemos son, por un lado, el conjunto base de matrices de referencia que caracterizan el criterio consensuado de ideal (o, para simplificar, criterio consensuado) que nos gustaría existiese en toda situación (X, p) y, por otro, el de distancia o seudodistancia a aplicar entre el conjunto de matrices de referencia y la matriz que caracteriza cada situación de voto (X, p).

Veamos pues, en primer lugar, los conceptos de distancia y seudodistancia que se utilizarán en la exposición posterior.

Definición 5.1 (Distancia)

Dado un conjunto no vacío Ω, llamamos ***distancia en Ω*** a cualquier aplicación d que asigna un número real no negativo $d(a, b)$ a cualquier par (a, b) de elementos de Ω, satisfaciendo:

a) $d(a, b) = 0$ si y sólo sí $a = b$.

b) $d(a, b) = d(a, b)$ para todo $a, b \in \Omega$.

c) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ para todo $a, b, c \in \Omega$.

Cualquier aplicación que satisfaga las condiciones b) y c) la llamaremos ***seudo-distancia***.

En el espacio $\boldsymbol{R}^h$, la familia más conocida de distancias es la familia **p-norma**, definida como sigue para cualquier número real positivo p:

Definición 5.2 (Familia de distancias p-norma, d_p)

La ***familia de distancias p-norma, d_p***, es el conjunto de distancias definidas como:

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \ldots + |x_h - y_h|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_h)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_h)$.

Las distancias más conocidas dentro de esta familia son la *distancia 1-norma*, $\boldsymbol{d_1}$, también llamada ***distancia Manhattan,*** y la *distancia 2-norma*, $\boldsymbol{d_2}$, también llamada ***distancia Euclídea.***

Otra distancia muy relacionada con las anteriores es la *distancia ∞-norma*, $\mathbf{d_\infty}$:

Definición 5.3 (Distancia ∞-norma, d_∞)

La ***distancia ∞-norma, d_∞***, se define como el límite de la distancia p-norma, d_p, cuando p tiende a infinito. Es fácil observar que:

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{h} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \underset{i=1,2,\ldots,h}{Max} |x_i - y_i|$$

de modo que, en realidad, la *distancia ∞-norma* coincide con la máxima diferencia entre las componentes de los vectores**.**

Otra distancia interesante es la siguiente:

Definición 5.4 (Distancia d_{cd})

La ***distancia d_{cd}*** es la distancia que determina el número de componentes en los que los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ difieren. Es decir:

$$d_{cd}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{h} \operatorname{sgn} |x_i - y_i|$$

Una forma natural y fácil de construir ***seudo-distancias* en $\boldsymbol{R^h}$**, es aplicar una distancia a un subconjunto propio de los componentes de los vectores. Por ejemplo, dados los vectores $\boldsymbol{x}$ = $(x_1, x_2, \ldots, x_h)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_h)$, $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$ es una seudo-distancia en $\boldsymbol{R^h}$ construida a partir de la distancia d_p en $\boldsymbol{R^2}$ aplicada a la primera y segunda componente de los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

Una vez establecidos los conceptos anteriores, que nos permitirán establecer una distancia o seudo-distancia entre cualesquiera dos matrices $n \times n$, el siguiente paso es establecer el segundo elemento esencial en la definición del esquema de este Modelo Unificador, el conjunto base de matrices que representan el criterio consensuado a alcanzar en la elección final por todos los métodos de votación obtenidos en base a él en este esquema.

En concreto, está claro que, a pesar de que los distintos métodos de votación pueden presentar discrepancias significativas bajo determinados perfiles de preferencias, si todos los votantes tienen idénticas preferencias sobre un candidato o candidatos, entonces parece indudable que esos candidatos unánimemente preferidos por todos deberían ser los elegidos finalmente. Por tanto, que cualquier opinión unánime debería verse reflejada en la elección final es uno de los primeros criterios consensuados que uno puede pensar en imponer a cualquier método de votación y, de hecho, este será el utilizado a continuación.

Supongamos ahora que, en lugar del perfil de preferencias de los votantes, la información de las preferencias viene resumida en una matriz como, por ejemplo, la matriz de comparaciones o de victorias. ¿Cómo representar en este nuevo contexto el criterio consensuado de Unanimidad?

Dado un conjunto de candidatos $X = \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ y una situación (X, p), sea M_p su matriz de comparación, cuyas entradas son $p\ (x_i,\ x_j)$. La idea del criterio consensuado va a estar representada, en este caso, por el conjunto de matrices de comparación correspondientes a todos los perfiles unánimes que se pueden obtener a partir de la ordenación de los n candidatos y en donde todos los m votantes tengan el mismo orden de preferencias.

Definición 5.5 (Matriz de Comparaciones Unánime para un orden O, $M_{U(O)}$)

Sea $X = \{x_1, x_2,\ldots x_n\}$. Para un orden cualquiera $O = y_1y_2\ldots y_n$, la correspondiente ***Matriz de Comparaciones Unánime***, que se denota $\boldsymbol{M_{U(O)}}$, es la matriz en la que el orden de filas y de columnas es O, y cuyas entradas son:

$$p_O(x_i, x_j) = \begin{cases} m & \text{si} \quad x_i \text{ precede a } x_j \text{ en } O \\ 0 & \text{si} \quad x_j \text{ precede a } x_i \text{ en } O \end{cases}$$

En otras palabras, si ordenamos las filas y columnas de $M_{U(O)}$ de acuerdo al orden O, cualquier entrada sobre la diagonal es m, y cualquier entrada por debajo de la diagonal es 0 (podemos decir que la entrada en la diagonal es siempre 0 por convenio). Se trata de la matriz de comparaciones que representa un perfil en el cual las preferencias de los m votantes son las reflejadas en O.

En este Modelo Unificador, las correspondencias de votación se construirán por medio de distancias, o mejor, seudo-distancias entre matrices de comparación, de la siguiente forma:

Definición 5.6 (Correspondencia asociada a una seudo-distancia)

Sea d una seudo-distancia definida entre cualesquiera dos matrices de comparaciones cuyas filas y columnas se ordenan de acuerdo al mismo orden lineal de los candidatos. Entonces, definimos $f_d(X, p) = \{x \in X$: existe un orden $O = x_1x_2\ldots x_n$ con $x = x_1$ tal que $d(M_p, M_{U(O)}) \leq d(M_p, M_{U(O')})$ para todo orden $O'\}$.

Es decir, la correspondencia f_d declara como ganador de determinada situación (X, p) a todo candidato que está en primer lugar de algún orden O tal que $d(M_p, M_{U(O)})$ es mínima.

De este modo, cualquier seudo-distancia que pueda definirse entre matrices n x n produce una correspondencia de votación que, de algún modo, transforma el problema de la elección del conjunto de ganadores en un problema de minimización de una seudo-distancia.

El uso de distancias es requerido para producir métodos de votación cuyo primer resultado es un ranking de candidatos, mientras que el uso de seudo-distancias es suficiente para producir métodos de votación cuyo primer resultado es un conjunto de candidatos ganadores.

Señálese en este punto que, si bien aquí el criterio consensuado establecido va a ser la elección, en caso de que exista, del candidato unánime y, en su ausencia, de aquél o aquéllos más cercanos a satisfacer dicho criterio, evidentemente éste no es el único criterio posible. Por ejemplo, si establecemos como criterio consensuado la elección de un candidato Condorcet en el caso de que exista y, en otro caso, aquél o aquéllos más cercanos a serlo, este Modelo Unificador requeriría definir el conjunto de matrices de comparaciones Condorcet respecto a cada uno de los posibles órdenes de preferencia O que se puedan formar entre el conjunto de candidatos.

El problema que encontramos es que, si bien desde el punto de vista teórico establecer este nuevo criterio consensuado parece igual de adecuado al criterio de unanimidad aquí propuesto, desde el punto de vista práctico se complica, pues el conjunto de matrices de comparaciones Condorcet no es unitario en relación a cada orden O.

5.3.2. Correspondencias de Votación conocidas obtenidas mediante el Modelo Unificador.

Una vez establecidos los elementos definitorios del Modelo Unificador presentado, veamos a continuación cuales son las correspondencias de votación conocidas que pueden enmarcarse dentro de este esquema teniendo en cuenta que, puesto que el criterio consensuado establecido es único, la diferencia entre ellas vendrá determinada exclusivamente por el tipo de distancia o seudo-distancia utilizada en su definición.

En concreto, haciendo uso de la *distancia 1-norma podemos caracterizar el método de* ***Kemeny*** como la correspondencia f_d en la que d es la *distancia 1-norma* d_{KEMENY} $(M_p,\ M_{U(O)}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|p(y_i, y_j) - p_O(y_i, y_j)\right|$, donde las dos matrices se ordenan de acuerdo con el mismo orden $O = y_1y_2\ldots y_n$. Dado que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|p(y_i, y_j) - p_O(y_i, y_j)\right| = 2\sum_{i>j}(m - p(y_i, y_j)) = 2\sum_{i>j}(m - K(O))$, d_{KEMENY} $(M_p, M_{U(O)})$ es mínima cuando el resultado de Kemeny (tal como se ha definido en el Capítulo 2) para el orden O, $K(O)$, es máximo.

Del mismo modo, encontramos que el método de **Borda** es la correspondencia f_d en la que d es la *seudo-distancia definida (a partir de la 1-norma distancia)* como d_{BORDA} $(M_p, M_{U(O)}) = \sum_{j=1}^{n}\left|p(y_1, y_j) - p_O(y_1, y_j)\right|$, donde ambas matrices se ordenan de acuerdo con el mismo orden $O = y_1y_2\ldots y_n$. Dado que $\sum_{j=1}^{n}\left|p(y_1, y_j) - p_O(y_1, y_j)\right| = \sum_{j=1}^{n}(m - p\ (y_1, y_j)) =$

$= nm - \sum_{j=1}^{n} p\ (y_1, y_j))$, d_{BORDA} $(M_p, M_{U(O)})$ es mínima cuando el resultado de Borda (tal como se ha definido en el Capítulo 2) de y_1, el primer candidato de O, es máximo.

En ambos casos, si reemplazamos la matriz de comparaciones M_p con la matriz de victorias V_p, obtenemos, respectivamente, las correspondencias de ***Slater*** y de ***Copeland***.

De esta forma, ***Slater*** es la correspondencia f_d que surge de aplicar la *distancia 1-norma* d_{SLATER} $(V_p, V_{U(O)}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \mathrm{v}(y_i, y_j) - \mathrm{v}_O(y_i, y_j) \right|$, donde las dos matrices se ordenan de acuerdo con el mismo orden $O = y_1 y_2 \ldots y_n$, y ***Copeland*** es la correspondencia f_d cuando d es la *seudo-distancia definida (a partir de la 1-norma distancia)* como $d_{COPELAND}$ $(V_p, V_{U(O)}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mathrm{v}(y_1, y_j) - \mathrm{v}_O(y_1, y_j) \right|$, donde ambas matrices se ordenan de acuerdo con el orden $O = y_1 y_2 \ldots y_n$.

Por otra parte, si tomamos como referencia la distancia ∞-norma, podemos realizar la siguiente caracterización de la correspondencia ***MaxMin***. El método ***MaxMin*** es la correspondencia f_d que surge cuando d es la seudo-distancia definida (a partir de la distancia ∞-norma) como $d(M_p, M_{U(O)}) = \underset{j=1,2,\ldots,n}{Max} \left| p(y_1, y_j) - p_O(y_1, y_j) \right|$, donde ambas matrices se ordenan de acuerdo con $O = y_1 y_2 \ldots y_n$. De hecho, dado que $\underset{j=1,2,\ldots,n}{Max} \left| p(y_1, y_j) - p_O(y_1, y_j) \right| = \underset{j=1,2,\ldots,n}{Max} (m - p(y_1, y_j)) = m - \underset{j=1,2,\ldots,n}{Min} p(y_1, y_j)$, $d(M_p, M_{U(O)})$ es mínima cuando la mínima entrada de la fila de y_1 (el primer candidato en O), es máxima.

Parece observarse dentro de este esquema que, si usamos distancias aplicadas a todas las entradas de las matrices (y, por lo tanto, a cualquier componente de $\boldsymbol{R}^{nxn}$), el resultado obtenido son correspondencias del tipo Kemeny, mientras que si usamos seudo-distancias aplicadas únicamente a la primera fila de las matrices (según el orden O), se obtienen correspondencias del tipo Borda y MaxMin.

Para finalizar la sección, se presenta un ejemplo clarificador del Modelo Unificador aplicándolo a una situación (X, p) concreta y calculando los ganadores para las correspondencias de Kemeny, Borda y MaxMin.

Ejemplo 5.1

Supongamos que partimos de la siguiente matriz de comparaciones, M_p, correspondiente a una situación (X, p), donde p es un perfil de preferencias sobre el conjunto de candidatos $X = \{x_1, x_2, x_3\}$con 11 votantes.

Matriz de Comparaciones M_p:

	x_1	x_2	x_3
x_1		4	6
x_2	7		5
x_3	5	6	

Construyamos a continuación el conjunto de matrices unánimes correspondientes a los seis posibles perfiles de preferencias que se pueden construir con tres candidatos: $\{O_1$: $x_1x_2x_3$; O_2: $x_1x_3x_2$; O_3: $x_2x_1x_3$; O_4: $x_2x_3x_1$; O_5: $x_3x_1x_2$, O_6: $x_3x_2x_1\}$

De este modo, para cada orden unánime de preferencias para todos los votantes tenemos:
Orden $\boldsymbol{O_1}$**:** $\boldsymbol{x_1x_2x_3}$:

Matrices $M_{U(O1)}$ y M_p ordenadas de acuerdo con O_1:

$\mathbf{M_{U(O1)}}$	x_1	x_2	x_3
x_1		11	11
x_2	0		11
x_3	0	0	

$\mathbf{M_p}$	x_1	x_2	x_3
x_1		4	6
x_2	7		5
x_3	5	6	

Orden $\boldsymbol{O_2}$: $\boldsymbol{x_1x_3x_2}$

Matrices $M_{U(O2)}$ y M_p ordenada de acuerdo con O_2:

$\mathbf{M_{U(O2)}}$	x_1	x_3	x_2
x_1		11	11
x_3	0		11
x_2	0	0	

$\mathbf{M_p}$	x_1	x_3	x_2
x_1		6	4
x_3	4		6
x_2	7	5	

Orden $\boldsymbol{O_3}$: $\boldsymbol{x_2x_1x_3}$

Matrices $M_{U(O3)}$ y M_p ordenada de acuerdo con O_3:

$\mathbf{M_{U(O3)}}$	x_2	x_1	x_3
x_2		11	11
x_1	0		11
x_3	0	0	

$\mathbf{M_p}$	x_2	x_1	x_3
x_2		7	5
x_1	4		6
x_3	6	5	

Orden $\boldsymbol{O_4}$: $\boldsymbol{x_2x_3x_1}$

Matrices $M_{U(O4)}$ y M_p ordenada de acuerdo con O_4:

$\mathbf{M_{U(O4)}}$	x_2	x_3	x_1
x_2		11	11
x_3	0		11
x_1	0	0	

$\mathbf{M_p}$	x_2	x_3	x_1
x_2		5	7
x_3	6		5
x_1	4	6	

Orden $\boldsymbol{O_5}$: $\boldsymbol{x_3x_1x_2}$

Matrices $M_{U(O5)}$ y M_p ordenada de acuerdo con O_5:

$\mathbf{M_{U(O5)}}$	x_3	x_1	x_2
x_3		11	11
x_1	0		11
x_2	0	0	

$\mathbf{M_p}$	x_3	x_1	x_2
x_3		5	6
x_1	6		4
x_2	5	7	

Por último, para el orden $\boldsymbol{O_6}$: $\boldsymbol{x_3x_2x_1}$

Matrices $M_{U(O6)}$ y M_p ordenada de acuerdo con O_6:

$\mathbf{M_{U(O6)}}$	x_3	x_2	x_1
x_3		11	11
x_2	0		11
x_1	0	0	

$\mathbf{M_p}$	x_3	x_2	x_1
x_3		6	5
x_2	5		7
x_1	6	4	

Calculemos a continuación, y tal como se ha definido dentro de este Modelo Unificador, los ganadores de ***Kemeny*** que son, los candidatos situados en primera posición en el orden O_k, para el cual el cual la distancia $d_{KEMENY}(M_p, \mathbf{M_{U(Ok)}}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left|p(y_i, y_j) - p_O(y_i, y_j)\right|$, para $k = 1, 2, 3,\ldots, 6$, es mínima.

$$d_{KEMENY}(M_p,\mathbf{M_{U(O1)}}) = |4-11|+|6-11|+|7-0|+|5-11|+|5-0|+|6-0| = 36$$

Procediendo de igual forma tenemos que:

$d_{KEMENY}(M_p, \mathbf{M_{U(O2)}}) = 34$

$d_{KEMENY}(M_p, \mathbf{M_{U(O3)}}) = 30$*

$d_{KEMENY}(M_p, \mathbf{M_{U(O4)}}) = 32$

$d_{KEMENY}(M_p, \mathbf{M_{U(O5)}}) = 36$

$d_{KEMENY}\ (M_p, \mathbf{M_{U(O6)}}) = 30^*$

El valor mínimo de $d_{KEMENY}(M_p, M_{U(Ok)})$ se obtiene cuando los órdenes unánimes en función de los cuales se calcula la distancia entre la matriz M_p y la matriz $M_{U(Ok)}$ son: O_3 y O_6, y cuyos primeros candidatos son, respectivamente, x_2 y x_3. Por tanto, los ganadores de Kemeny son (como de igual modo se puede calcular, como hemos demostrado, a partir de su definición original del Capítulo 2), esos dos candidatos: $f_{KEMENY} = \{x_2, x_3\}$.

De igual modo, calculemos ahora y, de nuevo, tal como se ha definido en este Modelo Unificador, los resultados de ***Borda*** para cada uno de esos seis órdenes unánimes, es decir, para este ejemplo concreto con tres candidatos, $d_{BORDA}(M_p, M_{U(Ok)}) = \sum_{j=1}^{n} \left| p(y_1, y_j) - p_{Ok}\,(y_1, y_j) \right|$, donde y_1 es el primer elemento del orden O_k:

$d_{BORDA}\ (M_p, \mathbf{M_{U(O1)}}) = \left(|4-11| + |6-11|\right) = 12$

Procediendo de igual forma tenemos que:

$d_{BORDA}\ (M_p, \mathbf{M_{U(O2)}}) = \left(|6-11| + |4-11|\right) = 12$

$d_{BORDA}\ (M_p, \mathbf{M_{U(O3)}}) = \left(|7-11| + |5-11|\right) = 10^*$

$d_{BORDA}\ (M_p, \mathbf{M_{U(O4)}}) = \left(|5-11| + |7-11|\right) = 10^*$

$d_{BORDA}\ (M_p, \mathbf{M_{U(O5)}}) = \left(|5-11| + |6-11|\right) = 11$

$d_{BORDA}\ (M_p, \mathbf{M_{U(O6)}}) = \left(|6-11| + |5-11|\right) = 11$

El valor mínimo de $d_{BORDA}\ (M_p, M_{U(Ok)})$ se obtiene cuando los órdenes unánimes en función de los cuales se calcula la distancia entre la matriz M_p y la matriz $M_{U(Ok)}$ son: O_3 y O_4, y cuyo primer candidato es, en ambos casos, x_2. Por tanto, el ganador de Borda es (como de igual modo se puede calcular, como hemos demostrado, a partir de su definición original del Capítulo 2), ese candidato: $f_{BORDA} = \{x_2\}$.

De igual modo, y por último, calculemos los resultados de la correspondencia ***MaxMin*** que, como se ha definido, es la correspondencia f_d cuando d es la seudo-distancia definida como $d_{MAXMIN}(M_p, M_{U(Ok)}) = \underset{j=1,2,\ldots,n}{Max} \left| p(y_1, y_j) - p_O(y_1, y_j) \right|$, donde y_1 es el primer elemento de O_k. Tenemos:

$$d_{MAXMIN}(M_p, \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{U(O1)}}) = Max\ \{|4-11|, |6-11|\} = 7$$

Procediendo de igual forma tenemos que:

$$d_{MAXMIN}(M_p, \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{U(O2)}}) = Max\ \{|6-11|, |4-11|\} = 7$$

$$d_{MAXMIN}(M_p, \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{U(O3)}}) = Max\ \{|7-11|, |5-11|\} = 6^*$$

$$d_{MAXMIN}(M_p, \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{U(O4)}}) = Max\ \{|5-11|, |7-11|\} = 6^*$$

$$d_{MAXMIN}(M_p, \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{U(O5)}}) = Max\ \{|5-11|, |6-11|\} = 6^*$$

$$d_{MAXMIN}(M_p, \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{U(O6)}}) = Max\ \{|6-11|, |5-11|\} = 6^*$$

El valor mínimo de $d_{MAXMIN}(M_p, M_{U(Ok)})$ se obtiene cuando los órdenes unánimes en función de los cuales se calcula la distancia entre la matriz M_p y la matriz $M_{U(Ok)}$ son: O_3, O_4, O_5 y O_6, y cuyos primeros candidatos son x_2 y x_3. Por tanto, los ganadores de Maximin son (como de igual modo se puede calcular, como hemos demostrado, a partir de su definición original del Capítulo 2), esos dos candidatos: $f_{MAXMIN} = \{x_2, x_3\}$.

Una vez obtenidos los candidatos ganadores para todas estas correspondencias, en términos del Modelo Unificador aquí definido, hay que señalar que, puesto que dentro de este esquema todos los métodos comparten el mismo criterio consensuado de ideal, la selección de un candidato unánime siempre que exista, eso significa que, dado que en la situación representada por la matriz M_p no existe tal candidato, los ganadores obtenidos por todos estos métodos son los candidatos que están más cerca de ser los candidatos unánimemente preferidos. Ahora bien, las diferencias entre los distintos métodos vienen determinadas por la concreta distancia o seudo-distancia que cada uno utiliza.

5.3.3. Una nueva correspondencia de votación.

Una vez presentado el Modelo Unificador y demostrado que a partir del mismo es posible obtener algunas correspondencias de votación bien conocidas, merece la pena explorar las consecuencias de elegir otras distancias o seudo-distancias.

En esta sección se presenta y analiza una nueva correspondencia de votación obtenida dentro del modelo unificador y que, como se verá, es una correspondencia Condorcet que cumple algunas propiedades interesantes de Participación y Monotonía.

Definamos las siguientes correspondencias basadas en la distancia ρ de Hölder:

Definición 5.7 (Correspondencias ρ de Hölder y ρ-grande de Hölder)

a) La ***Correspondencia ρ de Hölder*** es la correspondencia de votación $f_{d(\rho)}$ donde $d(\rho)$ es la seudo-distancia definida, a partir de la distancia de ρ-norma como $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(O)}) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left|p(x_1, x_j) - p_O(x_1, x_j)\right|^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ donde ambas matrices, M_p y $M_{U(O)}$, se ordenan de acuerdo con $O = x_1x_2\ldots x_n$.

b) La ***Correspondencia ρ-grande de Hölder*** es la correspondencia ***ρ*** *de Hölder* en la cual el número ρ cumple $nm << \rho < \infty$, lo cual significa que ρ es un número real positivo muy grande en relación a *nm, donde m es el número de votantes y n el número de candidatos*.

Apliquemos esta nueva correspondencia ρ-grande de Hölder al Ejemplo 5.1 seleccionando en concreto $\rho = 50$. Los candidatos ganadores son los situados en primera posición en el orden O_k, para el cual $d_{(50)}(M_p, M_{U(Ok)}) = \left(\sum_{j=1}^{3}\left|p(x_1, x_j) - p_{Ok}(x_1, x_j)\right|^{50}\right)^{\frac{1}{50}}$ es mínima para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

De este modo, y haciendo los cálculos con precisión a la diezmilmillonésima, obtenemos:

$$d_{(\rho)}(M_p, \boldsymbol{M_{U(O1)}}) = \left(|4-11|^{50} + |6-11|^{50}\right)^{\frac{1}{50}} = 7{,}0000000069$$

Procediendo de igual forma tenemos que:

$$d_{(\rho)}(M_p, \boldsymbol{M_{U(O2)}}) = \left(|6-11|^{50} + |4-11|^{50}\right)^{\frac{1}{50}} = 7{,}0000000069$$

$$d_{(\rho)}(M_p, \boldsymbol{M_{U(O3)}}) = \left(|7-11|^{50} + |5-11|^{50}\right)^{\frac{1}{50}} = 6{,}0000000002^*$$

$$d_{(\rho)}(M_p, \boldsymbol{M_{U(O4)}}) = \left(|5-11|^{50} + |7-11|^{50}\right)^{\frac{1}{50}} = 6{,}0000000002^*$$

$$d_{(\rho)}(M_p, \boldsymbol{M_{U(O5)}}) = \left(|5-11|^{50} + |6-11|^{50}\right)^{\frac{1}{50}} = 6{,}0000131855$$

$$d_{(\rho)}(M_p, \boldsymbol{M_{U(O6)}}) = \left(|6-11|^{50} + |5-11|^{50}\right)^{\frac{1}{50}} = 6{,}0000131855$$

El valor mínimo de $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Ok)})$ se obtiene para los órdenes O_3 y O_4, y cuyo primer candidato es, en ambos casos, x_2. Por tanto, $f_{(\rho)} = \{x_2\}$.

La siguiente proposición nos dice que la correspondencia $\boldsymbol{\rho}$-grande de Hölder coincide exactamente con una correspondencia de votación definida en el Capítulo 2 y que tiene muy buenas propiedades de Participación (tal como se ha demostrado ya en el Capítulo 4), la correspondencia Maximin Lexicográfica, f_{MML}.

Proposición 5.1

Dada una situación (X, p), con $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y una matriz de comparación M_p. Para todo x_j, sea $q(x_j) = (q_{j1}, q_{j2}, \ldots, q_{jn-1})$ el vector formado por las entradas fuera de la diagonal de la fila $p(x_j, x_r)$ de x_j ordenados en forma no decreciente. Entonces, si ρ es suficientemente grande, el candidato x_i pertenece a $f_{d(\rho)}(X, p)$ si y sólo si pertenece a $f_{MML}(X, p)$.

Recordemos que x_i pertenece a $f_{MML}(X, p)$ si, para cualquier otro candidato x_k, $q(x_i) \geq_{LEX} q(x_k)$ (es decir, $q_{i1} > q_{k1}$ o ($q_{i1} = q_{k1}$ y $q_{i2} > q_{k2}$) o ($q_{i1} = q_{k1}$ y $q_{i2} = q_{k2}$ y $q_{i3} > q_{k3}$) o …).

Demostración:

Para demostrar esta proposición probaremos en primer lugar el siguiente resultado intermedio:

Lema 5.1

Dados dos vectores **a** = $(a_1, a_2,\ldots, a_{n-1})$ y **a’** = $(a'_1, a'_2,\ldots, a'_{n-1})$, con coordenadas enteras positivas ordenadas en modo no creciente y limitadas superiormente por m ($m \geq a_i \geq a_{i+1}$ y $m \geq a'_i \geq a'_{i+1}$ $\forall i=1,\ldots, n-2$), y siendo ρ un número positivo suficientemente grande, se cumple:

$$\|\mathbf{a}\|_\rho \geq \|\mathbf{a'}\|_\rho \text{ si y sólo si } \mathbf{a} \geq_{\text{LEX}} \mathbf{a'},$$

donde $\|\mathbf{a}\|_\rho = (a_1^\rho + a_2^\rho + \ldots + a_{n-1}^\rho)^{1/\rho}$ y $\|\mathbf{a'}\|_\rho = (a'^\rho_1 + a'^\rho_2 + \ldots + a'^\rho_{n-1})^{1/\rho}$.

Para probar este resultado, calcularemos, en primer lugar, $\lim_{p\to\infty}(\|\mathbf{b}\|_p - \|\mathbf{b'}\|_p)$ para el caso extremo en el que **b** = $(b_1, 0,\ldots, 0)$ y **b’** = $(b_1-r, b_1-r,\ldots, b_1-r)$, siendo $r \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty}\left(\|\mathbf{b}\|_p - \|\mathbf{b'}\|_p\right) &= \lim_{p\to\infty}((b_1^p)^{\frac{1}{p}} - ((n-1)(b_1-r)^p)^{\frac{1}{p}}) \\
&= \lim_{p\to\infty}((b_1) - (n-1)^{\frac{1}{p}}(b_1-r)) \\
&= b_1 - (b_1-r)\lim_{p\to\infty}(n-1)^{\frac{1}{p}} \\
&= b_1 - (b_1-r) \\
&= r \geq 1
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso general para **a**, **a’** en el que $a_1 = b_1$ y $a'_1 = a_1 - r$:

$$\lim_{p\to\infty}(\|\mathbf{a}\|_p - \|\mathbf{a'}\|_p) \geq \lim_{p\to\infty}(\|\mathbf{b}\|_p - \|\mathbf{a'}\|_p) \geq \lim_{p\to\infty}(\|\mathbf{b}\|_p - \|\mathbf{b'}\|_p) \geq 1$$

Por tanto, existe un número real α_n, dependiendo de n, tal que para todo $\rho \geq \alpha_n$, $\|\mathbf{a}\|_\rho > \|\mathbf{a'}\|_\rho$. Este argumento es válido, en el caso general, para **a**, **a’** en el que $a'_1 = a_1,\ldots, a'_h = a_h$, y $a'_{h+1} = a_{h+1} - r$, donde $1 < h \leq n-1$. □

Para demostrar ahora la Proposición 5.1, consideremos ρ un número positivo tal que $\rho \geq \alpha_n$, y comparemos $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)})$ donde x_i está en primer lugar del orden Oi con $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Ok)})$ donde x_k está en primer lugar en el orden Ok:

$$d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| p(x_i, x_j) - p_{Oi}(x_i, x_j) \right|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} = \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{n} (m - p(x_i, x_j))^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Ok)}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| p(x_k, x_j) - p_{Ok}(x_k, x_j) \right|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} = \left(\sum_{j=1, j \neq k}^{n} (m - p(x_k, x_j))^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Llamemos $\boldsymbol{D_i} = (D_{i1}, D_{i2}, \ldots, D_{in-1})$ y $\boldsymbol{D_k} = (D_{k1}, D_{k2}, \ldots, D_{kn-1})$ a los vectores $\left(m - p(x_i, x_j)\right)_{j=1,2,\ldots,n,\, j \neq i}$ y $\left(m - p(x_k, x_j)\right)_{j=1,2,\ldots,n,\, j \neq k}$, después de permutar sus coordenadas de modo que queden ordenados en forma no decreciente.

Dado que $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)}) = \|\boldsymbol{D_i}\|_{\rho}$ y $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Ok)}) = \|\boldsymbol{D_k}\|_{\rho}$, podemos afirmar, en virtud del anteriormente probado resultado intermedio, que $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)}) \geq d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Ok)})$ si y sólo si $\boldsymbol{D_i} \geq_{\mathrm{LEX}} \boldsymbol{D_k}$. En efecto, puesto que Max $\{m - s_h\}_{h \in H} = m$ - Min $\{s_h\}_{h \in H}$, $\boldsymbol{D_i} \geq_{\mathrm{LEX}} \boldsymbol{D_k}$ es equivalente a $q(x_i) \geq_{\mathrm{LEX}} q(x_k)$. □

Obsérvese que hemos obtenido una correspondencia, f_{MML}, que es un refinamiento muy natural del MaxMin. De hecho, esto queda de manifiesto en el

Ejemplo 5.1 donde, como hemos visto, $f_{MAXMIN} = \{x_2, x_3\}$ y, sin embargo, $f_{MML} = \{x_2\}$ que, efectivamente, es un subconjunto de los candidatos ganadores en MaxMin.

Propiedades de la nueva correspondencia f_{MML}

En la siguiente Proposición 5.2 se demuestra que la correspondencia f_{MML} no es simplemente una nueva correspondencia obtenida a partir del Modelo Unificador sino que, además, desde un punto de vista axiomático y, en concreto, en relación a algunas de las propiedades de Monotonía y Participación definidas a lo largo de esta Tesis, presenta un buen comportamiento.

De este modo, el Modelo Unificador desarrollado a lo largo de las secciones anteriores, no es sólo una herramienta teórica para la obtención de métodos de votación sino que, además, puede dar lugar a correspondencias de votación que presentan cierta bondad, al menos, desde el punto de vista de la racionalidad individual y, así, su posible aplicación práctica no es descartable.

Proposición 5.2

La correspondencia de votación f_{MML}:

a) Cumple el Criterio Condorcet y Participación Positiva Estricta, pero no Participación Optimista.
b) Cumple Monotonía Estricta.

Demostración:

a) Que cumple el criterio de Condorcet se comprueba de manera inmediata, ya que es un refinamiento de MaxMin, que también lo cumple. No satisface la Participación Optimista porque ya sabemos que ninguna correspondencia de votación de tipo Condorcet satisface tal propiedad. Que cumple Participación Positiva Estricta ha sido demostrado en la Proposición 4.2.

b) Sea x un ganador en la situación (X, p). Esto significa que, para cualquier otro candidato y, $q(x, p) \geq_{\text{LEX}} q(y, p)$, donde $q(y, p)$ es un vector formado por los términos no diagonales de la fila de y ordenados en forma no decreciente. Si hacemos in intercambio mínimo a favor de x, en la nueva situación (X, p'_x) el vector $q(x, p'_x)$ es el resultado de añadir 1 a una componente de $q(x, p)$. Es claro que x será el único ganador en la nueva situación (X, p'_x). □

5.3.4. Nueva Familia de métodos obtenidos dentro del Modelo Unificador.

En las secciones anteriores se ha definido, dentro del Modelo Unificador, un conjunto de correspondencias de votación por medio de distancias o seudo-distancias desde matrices cualesquiera de comparación a matrices unánimes.

En esta sección se pretende explorar, siquiera de manera incipiente y provisional, una pequeña familia de métodos de votación contenida en el conjunto de correspondencias mencionado. Se trata de la familia uniparamétrica (dependiente del parámetro ρ) que tiene sus extremos en Borda (seudo-distancia definida a partir de la *1*-norma, es decir, con $\rho = 1$) y MaxMin (seudo-distancia definida a partir de la ∞-norma, con $\rho = \infty$). Recuérdese que si el valor del parámetro ρ era "suficientemente grande" obteníamos el nuevo método MaxMin Lexicográfico.

No deja de ser sorprendente que una familia definida con una estructura tan "unificada" tenga entre sus miembros, aunque sea en los extremos, dos métodos tan dispares como Borda y MaxMin, uno Posicional y otro Condorcet. Podríamos especular que algunos miembros no extremos de esta familia tienen propiedades especiales derivadas de su posición de frontera entre lo posicional y lo mayoritario, y que esas propiedades pudieran ser útiles en algún contexto o circunstancia especial que ahora desconocemos.

Dejando esas reflexiones para una posible investigación futura, abordaremos ahora un ejercicio mucho más modesto, consistente en explorar qué propiedades (de entre las aquí consideradas) comparten los métodos de esta familia.

La familia a estudiar no es otra que la de las correspondencias ρ-Hölder donde $\rho \in [1, \infty]$. Recuérdese que se definen como:

$$f_{d(\rho)}(X, p) = \{x \in X : \text{existe un orden } O = x_1 x_2 \ldots x_n \text{ con } x = x_1 \text{ tal que}$$
$$d_{(\rho)}(M_p, M_{U(O)}) \leq d_{(\rho)}(M_p, M_{U(O')}) \text{ para todo orden } O'\}.$$

Siendo $d_{(\rho)}$ la seudo-distancia $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(O)}) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left| p(y_1, y_j) - p_O(y_1, y_j) \right|^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}}$,

donde ambas matrices se ordenan de acuerdo con el mismo orden $O = y_1 y_2 \ldots y_n$.

Proposición 5.3

Todos los métodos de votación que pertenecen a esta familia, salvo el correspondiente a $\rho = \infty$, cumplen las siguientes propiedades:

a) Respeto de la C2-dominación.

b) Monotonía Estricta.

c) Participación Positiva Estricta.

Demostración:

a) Sabemos que, dada una situación (X, p) y una matriz de comparación M_p, para todo $x_i \in X$, $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)})$ donde x_i está en primer lugar del orden Oi es:

$$d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)}) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left| p(x_1, x_j) - p_O(x_1, x_j) \right|^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \left| m - p(x_1, x_j) \right|^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}}$$

Expresado de otro modo más simple, calcular esa seudo-distancia se reduce a calcular la ρ-norma del vector $[(m - \alpha_{i1}), (m - \alpha_{i2}),\ldots, (m - \alpha_{in})]$, donde $\alpha_{ij} = p(x_i, x_j)$ con $j = 1\ldots n, j \neq i$ y, por lo tanto, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in})$ se corresponde con el vector fila de la matriz de comparaciones M_p, correspondiente al candidato x_i:

$$d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)}) = \left| (m - \alpha_{i1}), (m - \alpha_{i2}),\ldots,(m - \alpha_{in}) \right|_{\rho}$$

Si el candidato x_i es un candidato que C2-domina a todos los demás está claro que su vector α_i tiene todas sus componentes mayores (en al menos un término) o iguales a α_k, $\forall x_k \in X/x_i$ y, por lo tanto, $d(M_p, M_{U(O)})$ es mínima cuando $O = O_i$.

Por tanto, la correspondencia $f_{d(\rho)}(X, p)$ elegirá siempre como ganador un candidato C2-dominante (si existe) en cualquier situación (X, p), y para todo $\rho \in (1, \infty)$.

b) Si el candidato x_i era ganador para $f_{d(\rho)}(X, p)$ en la situación (X, p), y le damos un empujón a su favor (consistente en un intercambio mínimo con el candidato z), en la nueva situación, (X, p'), encontraremos que, en la matriz de posiciones $M_{p'}$, la fila correspondiente al candidato x_i, será igual a la de la situación inicial salvo por el incremento de una unidad en el elemento correspondiente al candidato z y, por lo tanto, de la correspondiente componente de su vector

α_i'. De igual modo, supondrá la pérdida de esa misma unidad en la componente simétrica del vector α_z' del candidato z. Los vectores de los demás candidatos no sufren ningún cambio $\alpha_t = \alpha_t \, \forall \, t \neq i, j$.

De este modo, $d_{(\rho)}(M_p, M_{U(Oi)}) < d_{(\rho)}(M_{p'}, M_{U'(Oi)})$ y, por lo tanto, si x_i era ganador para la situación (X, p), lo seguirá siendo en la nueva situación (X, p').

Es más, ningún candidato que no fuera ganador en la situación inicial podrá convertirse en ganador ahora y, si x_i estaba empatado con cualquier otro, esa mejora, que sólo le afecta a él positivamente, hará que se convierta en ganador único en (X, p'), para todo $\rho \in (1, \infty)$. En consecuencia, todos los métodos de votación de la familia $F(\rho)$ verifican la propiedad de Monotonía estricta.

c) El mismo razonamiento expresado para demostrar el cumplimiento de Monotonía Estricta, es válido para demostrar el cumplimiento por parte de esta familia de métodos de votación de la propiedad de Participación Positiva Estricta, salvo que ahora, la mejora a favor del candidato ganador x_i consiste en introducir en el perfil un nuevo votante, v, que lo tiene a él como candidato favorito en sus preferencias. Así pues, en la situación $(X, p+ v)$, todos los elementos de su vector α_i se habrán incrementado en una unidad, mientras que, para el resto de los candidatos, ese incremento se producirá en alguna de las componentes, pero no en todas (como máximo en todas salvo en la primera para el candidato que está situado en segunda posición en las preferencias del votante v).

A partir de aquí, el razonamiento es similar al ya expuesto en el apartado b), con lo que si x_i era ganador para la situación (X, p), lo seguirá siendo en la nueva situación $(X, p+ v)$ y, ningún candidato que no fuera ganador en la situación inicial podrá convertirse en ganador ahora. Por último, si x_i estaba empatado con cualquier otro candidato, la introducción de ese nuevo votante hará que se convierta en ganador único en (X, p'), para todo $\rho \in (1, \infty)$.

En consecuencia, todos los métodos de votación de esta familia verifican la propiedad de Participación Positiva Estricta. □

5.4. Conclusiones y Consideraciones Adicionales.

A pesar de la gran variedad existente de distintos métodos de votación conocidos, mediante el Esquema Generador desarrollado en este capítulo, se ha puesto de manifiesto el hecho de que es posible asumir que detrás de la mayoría ellos, e independientemente del algoritmo específico que los defina, se encuentra subyacente la idea común de la existencia de un criterio consensuado sobre lo que constituye el candidato o conjunto de candidatos ideales o, dicho de otro modo, admisible como ganadores de pleno derecho con independencia de las preferencias reales de los votantes

A partir de ese elemento común, en el Esquema Generador aquí propuesto, el ***Modelo Unificador basado en distancias***, los métodos de votación se han a caracterizado en términos de dos componentes fundamentales: un criterio consensuado de ideal, y una distancia a dicho criterio, de modo que el uso de un determinado método de votación suponga reducir al mínimo la distancia entre el criterio consensuado establecido y el observado.

De este modo, y siguiendo en cierto modo una aproximación similar a la establecida, entre otros, en Nitzan (1981), Lerer y Nitzan (1985), Campbell y Nitzan (1986), Nurmi (2004), o Meskanen y Nurmi (2004), el análisis se ha centrado en un subconjunto concreto de los métodos de votación que comparten la idea de minimizar una determinada distancia. Ahora bien, a diferencias de ellos, en la definición de este Modelo Unificador no se requiere del uso de toda la información contenida en el perfil completo de preferencias, sino simplemente la información contenida en alguna de sus matrices resumen asociadas.

En concreto, los dos conceptos fundamentales del Modelo Unificador basado en distancias propuesto son, por un lado, un conjunto base de matrices de referencia que caracterizan el criterio consensuado de ideal que nos gustaría existiese en toda situación (y que, en este caso, está constituido por las matrices de comparaciones correspondientes a perfiles unánimes) y, por otro, una distancia o seudo-distancia a aplicar entre ese conjunto de matrices de referencia y la matriz de comparación que caracteriza una determinada situación de voto.

A partir de la definición y de la especificación concreta de estos elementos esenciales del modelo, en la Sección 5.3.2, se *comprueba que algunos de los métodos generados mediante el* *uso del Modelo Unificador basado en distancias coinciden con métodos bien conocidos en la literatura, como Borda, Kemeny o MaxMin*.

Por su parte, en la Sección 5.3.3 se demuestra también que, mediante el uso y la definición de otras distancias *se pueden obtener nuevas correspondencias de votación: Correspondencias ρ de Hölder y ρ-grande de Hölder*. Aún más, la Proposición 5.1 demuestra que la *Correspondencia ρ-grande de Hölder* coincide con la nueva correspondencia de votación definida en el Capítulo 2, la correspondencia *MaxMin Lexicográfico, f_{MML}*, y la Proposición 5.2, a su vez, pone de manifiesto que esta nueva correspondencia de votación obtenida dentro del esquema del Modelo Unificador no se limita a ser fruto de un simple ejercicio teórico sino que, además, presenta una cierta bondad desde el punto de vista axiomático y, por tanto, es aplicable como método de votación en aquellas cuestiones prácticas donde sus características sean consideradas como adecuadas. De hecho, en términos de Participación y Monotonía, tiene propiedades excelentes, a pesar de ser Condorcet, y es muy bueno también desde el punto de vista de su resolutividad.

A continuación, en la Sección 5.3.4 *se ha definido y comenzado a analizar una nueva familia de métodos de votación desarrollada a partir de seudodistancias de Hölder con valores de d entre 1 e ∞* y, de nuevo, al igual que anteriormente, se han analizado algunas de las propiedades que cumplen los métodos de votación pertenecientes a dicha familia y recogidas en la Proposición 5.3.

Hay que señalar que entre los métodos pertenecientes a dicha familia se encuentran, en sus extremos, dos métodos tan diferentes como Borda y MaxMin pertenecientes, a su vez, respectivamente, a la familia de los métodos Posicionales y de los métodos Condorcet.

En este sentido, y en investigaciones futuras, se podría tratar de analizar más profundamente las propiedades de algunos miembros no tan extremos de esta familia partiendo del supuesto de que puedan presentar propiedades especiales derivadas de su posición frontera entre lo posicional y lo mayoritario y que, de esta forma, dichas propiedades pudieran ser útiles en algún nuevo contexto o circunstancia especial que ahora desconocemos.

Por último, otro posible camino a seguir el esta línea de investigación podría ser (como en el caso de Meskanen y Nurmi, 2006) la definición de nuevas distancias y nuevas matrices, como sería el caso de las matrices de posiciones, que permitan la obtención de nuevas correspondencias que se situarían dentro de este Modelo Unificador. Ahora bien, su sola definición no parece suficiente si no se apoya con algún tipo de análisis, ya no sólo axiomático, sino que refrende su definición como algo más que un ejercicio teórico.

CONCLUSIONES

Esta Tesis, en su intento de profundizar en el estudio de los métodos de votación, ha considerado como objetivo principal su análisis en relación al problema de la abstención y, más concretamente , al intento de extender el Teorema Moulin (1988a), que demuestra que, en el contexto de los métodos de votación resolutivos, todos los métodos Condorcet sufren la Paradoja de la Abstención y, por tanto, son susceptibles de manipulación mediante la abstención, al ámbito general de los métodos de votación no resolutivos (correspondencias de votación).

Para ello, y en primer lugar, se tiene que afrontar un problema previo que, además, es compartido en los análisis de los aspectos estratégicos y de manipulación en general de los métodos de votación: la extensión de las preferencias de los votantes. Es decir, el establecimiento de órdenes de preferencias sobre subconjuntos de alternativas o candidatos consistentes con los órdenes lineales que los votantes tienen sobre dichas alternativas o candidatos.

En este sentido, en el Capítulo 2 se definen distintos tipos de órdenes entre conjuntos, clasificándolos en dos grandes grupos que se diferencian en función de la información que, más allá de su propio orden de preferencias individuales, se posee acerca de cómo los votantes valoran las diferentes alternativas, o de cómo suponen que se realizará la elección final sobre un resultado que contiene más de una alternativa. De este modo, en un primer grupo, se especifican aquellos órdenes en los que los votantes ordenan los distintos conjuntos de candidatos sin tener más información que sus propias preferencias individuales mientras que, en un segundo grupo, se incorpora ya la posibilidad de que a la hora de ordenar conjuntos, no sólo se cuente con la información contenida en el orden de preferencias de cada votante, sino con información de algún tipo de función de utilidad que mida la intensidad de las preferencias de un votante entre las distintas alternativas (candidatos), y alguna función de probabilidad que determine la posibilidad de que determinada alternativa (candidato) sea finalmente elegida entre un subconjunto inicial de las ganadores.

A continuación, y una vez definidos los distintos órdenes entre conjuntos, se establecen las relaciones e implicaciones lógicas fundamentales que existen entre ellos y que son una herramienta esencial, no sólo para entender los principales resultados que, en relación a la manipulación en general y al problema de extensión del Teorema de Gibbard-Satterthwaite, se han obtenido en el contexto de las correspondencias de votación, sino porque es precisamente un análisis similar, pero en relación a la cuestión particular de manipulación mediante abstención, y a la posibilidad de extender el Teorema de Moulin a ese mismo contexto de las correspondencias de votación, lo que constituye el grueso de la investigación contenida en el siguiente capítulo.

En el Capítulo 3, se presentan las principales propiedades de Participación en el contexto general de las correspondencias de votación definiéndolas, por un lado directamente, sin hacer uso específico de ningún orden de preferencias entre subconjuntos y, por otro, en base ya a un orden específico de extensión de las preferencias individuales a subconjuntos de candidatos, haciendo uso de la investigación y los resultados obtenidos en el Capítulo 2. A continuación, se establecen también las principales implicaciones lógicas entre todas ellas, representadas globalmente de forma gráfica en la Figura 3.14.

Por otro lado, y ya con en el objetivo concreto de intentar extender el resultado de imposibilidad de Moulin a este nuevo contexto general de las correspondencias de votación, se presentan, en primer lugar, los principales resultados ya conocidos (todas ellas incumplen CV-Participación (Proposición 3.9) y Participación Optimista y Pesimista (Proposición 3.12)).

A partir de estos resultados, y una vez definidas las propiedades de Participación en función de órdenes de preferencias entre conjuntos, se ha optado por abordar el análisis de la Paradoja de la Abstención desde el punto de vista de la manipulación, es decir, considerando que los votantes, ante la decisión de votar, pueden manipular el resultado de la elección en su beneficio decidiendo abstenerse. En consecuencia, se define el concepto de manipulación mediante abstención según cada uno de los órdenes previamente definidos entre conjuntos.

Una vez establecida esa definición, un primer resultado (Proposición 3.13) es un resultado de imposibilidad, que establece que *ninguna correspondencia de votación Condorcet es inmune según un orden Optimista o Pesimista* (*Jimeno, Pérez y García, 2008*), es decir, para toda correspondencia de votación Condorcet existen situaciones en las que todo votante optimista o pesimista con determinadas preferencias podría manipular la elección a su favor absteniéndose.

Además, y con la ayuda de las relaciones lógicas establecidas entre las distintas propiedades de Participación definidas, se pueden extraer conclusiones adicionales. En particular (debido a que el orden *Optimista* implica los órdenes *Algunos Votantes Bayesianos Uniformes* y *Algunos Votantes Bayesianos*) también podemos decir que *ninguna correspondencia de votación Condorcet es inmune según el orden para Algunos Votantes Bayesianos Uniformes ni para Algunos Votantes Bayesianos.*

El segundo resultado (Proposición 3.14), un resultado de posibilidad, establece que *la correspondencia de votación Condorcet f_{RSTC}* (así llamado por ser *un refinamiento de la correspondencia de votación f_{STC}* (*Schwartz Top Cycle*)) *es inmune según el orden LexiMaxMin* y, por tanto, está libre de la paradoja de la abstención desde el punto de vista de los votantes cuyas preferencias están de acuerdo con ese orden. De nuevo, con la ayuda de las conexiones lógicas entre las distintas propiedades de Participación definidas, podemos establecer a través de f_{RSTC} los límites de la paradoja para diferentes órdenes de extensión. En particular, está claro que *f_{RSTC} es también Inmune para todo orden de extensión tal que implica el orden LMM*.

En el Capítulo 4, en primer lugar y en la Sección 4.2 se muestra que, *ciñéndonos al conjunto de propiedades de Participación tratadas en el Capítulo 3, no existen otros resultados de imposibilidad para correspondencias de votación Condorcet que los ya recogidos allí y que afectan a CV-Participación, Participación Optimista y Participación Pesimista, o los que se deducen de ellos de manera obvia*, por implicar de manera directa a estas tres propiedades y, por tanto, ser más fuertes. En particular, afectarán a *Participación Pesimista Fuerte*, *Participación Optimista Semiestricta*, *Participación Optimista Cuasiestricta*, *Participación* *según el orden para Algunos Votantes Bayesianos Uniformes, Participación según el orden para Algunos Votantes Bayesianos y también según el orden Optimista Estricto*.

Además, también se demuestra que, *para la propiedad de Participación Positiva Estricta y para la propiedad de Participación definida en base al orden para Todos los Votantes Bayesianos Uniformes, ya existen correspondencias de votación Condorcet, en concreto, la correspondencias MaxMin Lexicográfica y la correspondencia Elige-Todos respectivamente, que sí las cumplen.* Por tanto, con este resultado queda completado el análisis de posibilidad-imposibilidad en relación a las Propiedades de Participación en correspondencias de votación Condorcet.

Para concluir la sección, también se explora de manera no exhaustiva la incidencia, tanto en las propias correspondencias Condorcet, como en algunas correspondencias posicionales relevantes, el cumplimiento e incumplimiento de las propiedades de Participación definidas.

Por su parte, la Sección 4.3 se sitúa ya en un nuevo contexto, el de las llamadas *k*-funciones, es decir, correspondencias de votación que, en cada situación, eligen como resultado final un conjunto de *k* alternativas o candidatos ganadores. En este nuevo contexto, y de un modo paralelo a la investigación anterior, tratando de extender el resultado de Moulin (1988a), los resultados principales obtenidos son que, *toda k-función f que sea k-Condorcet es k-Manipulable según el orden Optimista, y que toda k-función f que sea k-Condorcet y cumpla Traslación Invariante es k-Manipulable según el orden Pesimista.*

La sección concluye con la presentación de otro nuevo contexto, las *k*-correspondencias, es decir, correspondencias que a cada perfil de preferencias asignan un conjunto no vacío de *k*-conjuntos de candidatos. En ese contexto, se inicia el estudio de una posible extensión de los resultados obtenidos para correspondencias de votación Condorcet a este nuevo contexto de *k*-correspondencias Condorcet. Puesto que ahora los resultados a comparar son conjuntos de conjuntos de *k*-elementos, ya no son suficientes los órdenes entre conjuntos definidos en el Capítulo 2, sino que se hace necesario extender la ordenación entre conjuntos a *k*-órdenes entre familias de *k*-conjuntos.

Para finalizar el capítulo, en la Sección 4.4, a partir de la relación existente entre la propiedad de Consistencia Externa de Young y la propiedad de Participación Positiva, se obtiene un resultado de imposibilidad que es una extensión del Teorema de Young y Levenglick (1978) para todas las correspondencias de votación Condorcet: *ninguna correspondencia de votación Condorcet cumple la propiedad de Consistencia Casi Paretiana, CCP,* es decir, no existe ningún método consistente con el principio de Condorcet que mantenga la coherencia en la agregación de electorados incluso cuando en una población tenemos un candidato que Pareto Domina a todos los demás excepto quizás en un votante para el que es el segundo candidato más preferido.

Finalmente, la Tesis concluye con el Capítulo 5, donde *se propone un Esquema Generador de métodos de votación, el llamado Modelo Unificador basado en distancias*. En este modelo, los distintos métodos se caracterizan en términos de dos componentes fundamentales: un conjunto base de matrices de referencia que caracterizan el criterio consensuado de ideal que nos gustaría existiese en toda situación (y que, en este caso, está constituido por las matrices de comparaciones correspondientes a perfiles unánimes) y, por otro, una distancia o seudo-distancia a aplicar entre ese conjunto de matrices de referencia y la matriz resumen de comparación que caracteriza una determinada situación de voto. De este modo, el uso de un determinado método de votación supondrá reducir al mínimo la distancia entre esas matrices, es decir, minimizar la distancia entre el criterio consensuado de ideal establecido y el realmente observado.

La definición de este nuevo Esquema Generador permite poner de manifiesto que, además de que *algunos de los métodos generados por el Modelo Unificador coinciden con métodos bien conocidos en la literatura, como Borda, Kemeny o MaxMin,* mediante el uso y la definición de otras distancias *se pueden obtener nuevas correspondencias de votación: Correspondencias ρ de Hölder y ρ-grande de Hölder*. Aún más, se demuestra que *la Correspondencia ρ-grande de Hölder coincide con una nueva correspondencia de votación, la correspondencia MaxMin Lexicográfico, f_{MML},* que ha jugado un papel relevante en el Capítulo 4. Además, esta nueva correspondencia de votación no se limita a ser fruto de un simple ejercicio teórico, sino que presenta una cierta bondad desde el punto de vista axiomático y, por tanto, es aplicable como método de votación en aquellas cuestiones prácticas donde sus características sean consideradas como adecuadas. De hecho, habría que destacar que, en términos de Participación y Monotonía, tiene propiedades excelentes, a pesar de ser Condorcet, y es muy buena también desde el punto de vista de su resolutividad.

Por último, se ha definido y comenzado a analizar una *nueva familia de métodos de votación desarrollada a partir de seudodistancias de Hölder con valores de d entre 1 e* ∞ y, de nuevo, al igual que anteriormente, se han analizado algunas de las propiedades que cumplen los métodos de votación pertenecientes a dicha familia. Hay que señalar que entre los métodos pertenecientes a dicha familia se encuentran, en sus extremos, dos métodos tan diferentes como Borda y MaxMin pertenecientes, a su vez, respectivamente, a la familia de los métodos Posicionales y de los métodos Condorcet.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleskerov, F.T. y Kurbanov, E. (1999). "A degree of manipulability of known Social Choice Procedures", en Alkan, A., Aliprantis, C. y Yannelis, N. (Eds). *Current Trends in Economics: Theory and Applications*, Springer, 13-27.

Arrow, K.J. y Raynaud, H. (1986). *Social Choice and Multicriteria Decision Making*, MIT Press, Cambridge.

Barba-Romero S y Pomerol, J.Ch. (1997) *Decisiones multicriterio fundamentos teorícos y utilización práctica.* Servicio de publicaciones Universidad de Alcalá.

Barberá, S. (1977a). "The manipulability of social choice rules that do not leave "too much" to chance", *Econometrica* 45, 1573–1548.

Barberà, S. (1977b). "Manipulation of social decision functions", *Journal of Economic Theory* 15, 262–278

Barberá, S. y Coelho, D. (2008). "How to choose a non-contorversial list with k names", *Social Choice and Welfare* 31, 79-96.

Barberá, S., Dutta, B. y Sen, A.K. (2001). "Strategy-proof Social Choice Correspondences", *Journal of Economic Theory* 101, 374-394.

Benoît, J.P. (2002). "Strategic manipulation in voting games when lotteries and ties are permitted", *Journal of Economic Theory* 102, 421-436.

Black, D. (1948). "On the rationale of group decision making", *Journal of Political Economy* 56, 23–34.

Borda, J.C. de (1781). "Mémoire sur les élections par scrutin", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Année*, 657-665.

Bouyssou, D., Marchant, Th. y Perny, P. (2003). "*Théorie du choix social et aide multicritère à la decisión*", working paper.

Brams S.J. y Fishburn P.C. (1983). *Approval voting*. Birkhäuser, Basel

Campbell, D.E. y Nitzan, S. (1986). "Social compromise and social metrics", *Social Choice and Welfare* 3, 1-16.

Campbell, D.E. y Kelly, J.S. (2000a). "A trade-off result for preference revelation", *Journal of Mathematical Economics* 34, 129-142.

Campbell, D.E. y Kelly, J.S. (2000b). "Information and preference aggregation", *Social Choice and Welfare* 17, 3-24.

Campbell, D.E. y Kelly, J.S. (2002). "A Leximin Characterization of strategy-proof and Non-resolute Social Choice Procedures", *Economic Theory* 20, 809-829.

Chamberlin, J.R. y Courant, P.N. (1977). "On the selection of representative committees", *Institute of Public Policy Studies Discussion Paper* 108, The University of Michigan.

Chamberlin J.R., Cohen J.L. y Coombs C.H. (1984). "Social choice observed: Five presidential elections of the American Psychological Association", *Journal of Politics* 46, 479–502.

Ching, S. y Zhou, L. (2002). "Multi-valued strategy-proof Social Choice Rules", *Social Choice and Welfare* 19, 569-580.

Condorcet, Marquis de (1785). *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix*. Académie des Sciences, Paris.

Dasgupta P. y Maskin, E. (2004). "The fairest vote of all", *Scientific American* 290, 92-97.

De Donder, P., Le Breton, M. y Truchon, M. (2000). "Choosing from a weighted tournament", *Mathematical Social Sciences* 40, 85–109.

Duggan, J. y Schwartz, T. (2000). "Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized", *Social Choice Welfare* 17, 85-93.

Dummett, M. y Farquharson R. (1961). "Stability in voting", *Econometrica* 29, 33–43.

Dutta, B. (1988). "Covering Sets and a New Condorcet Correspondence", *Journal of* . *Economic Theory* 44, 6–80.

Farquhar P.H. y Rao V.R. (1976). "A balance model for evaluating subsets of multiattributed models", *Management Science* 22, 528-539.

Favardin, P., Lepelley, D. y Serais, J. (2002). "Borda rule, Copeland method and strategic manipulation", *Review of Economic Design* 7, 213–228.

Favardin, P., Lepelley, D. y Serais, J. (2006). "Some further results on the manipulability of social choice rules", *Social Choice and Welfare* 26, 485–509.

Feldman, A. (1979a). "Manipulation of the Pareto rule", *Journal of Economic Theory* 21:473–482.

Feldman, A. (1979b). "Non manipulable multi-valued social decision functions", *Public Choice* 34, 39–50.

Fishburn, P.C. (1977). "Condorcet Social Choice Functions", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 33, 469-489.

Fishburn, P.C. (1981). "An analysis of simple voting systems for electing committees", *SIAM Journal on Applied Math* 41, 499-502.

Fishburn, P.C. (1982). "Monotonicity paradoxes in the theory of voting", *Discrete Applied Mathematics* 4, 119–134.

Fishburn, P.C. y Brams, S.J. (1983). "Paradoxes of preferential voting", *Mathematics Magazine* 56, 207-214.

García-Lapresta, J.L. y Llamazares, B. (2000). "Aggregation of fuzzy preferences: some rules of the mean", *Social Choice and Welfare*, 17, 673-690.

García-Lapresta, J.L. y Llamazares, B. (2001). "Majority decisions based on difference of votes", *Journal of Mathematical Economics* 35, 463–481.

Garcia- Lapresta, J.L. y Martínez-Panero, M. (2002). "Borda count versus approval voting: A fuzzy approach", *Public Choice*, 112, 167-184.

Gärdenfors, P. (1976). "Manipulation of social choice functions", *Journal of Economic Theory* 13, 217–228.

Gehrlein, W.V. (1985). "The Condorcet Criterion and Committee Selection" *Mathematical Social Sciences* l0, 199-209

Gibbard, A. (1973). "Manipulation of voting schemes; a general result". *Econometrica* 41, 587–601.

Good I.J. y Tideman T.N. (1976). "A principle for selecting a representative committee", *Virginia Polytechnic Institute and State University*.

Heckelman, J.C. (2003). "Probabilistic Borda rule voting", *Social Choice and Welfare*, 21, 455–468.

Jimeno, J.L. (2003). *Propiedades de Participación en los métodos de agregación de preferencias*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá.

Jimeno, J.L., Pérez, J. y García, E. (2008). "An extension of the Moulin No Show Paradox for voting correspondences" *Social Choice and Welfare.*DOI 10.1007/s00355-008-0360-6. Documento Online

Kaymak, B. y Sanver, M.R. (2003). “Sets of alternatives as Condorcet winners”, *Social Choice and Welfare* 20, 477-494.

Kelly, J.S. (1977). “Strategy-proofness and social choice functions without single-valuedness”, *Econometrica* 45, 439–446.

Kelly, J.S. (1993). “Almost all Social Choice Rules are highly manipulable, but a few aren't”, *Social Choice and Welfare* 10, 161-175.

Kemeny, J.G. y Snell, J.L. (1962). Mathematical Models in the Social Sciences, MIT Press, Cambridge, Mass.

Kim, H.K. y Roush, F.W. (1984). “Non-manipulability in two dimensions”, *Mathematical Social Science* 8, 29–43.

Klamler, C. (2003). "A comparison of the Dodgson method and the Copeland rule", *Economics Bulletin* 4, 1-7.

Klamler, C. (2004a). "The Dodgson ranking and its relation to Kemeny’s method and Slater’s rule", *Social Choice and Welfare* 23, 91-102.

Klamler, C. (2004b). "The Dodgson ranking and the Borda count: a binary comparison", *Mathematical Social Sciences* 48, 103-108.

Laffond, G., Laslier, J.-F. y Le Breton, M. (1993). “The Bipartisan Set of a tournament game”, *Games and Economic Behavior* 5, 182–201.

Laffond, G., Laslier, J.F. y Le Breton, M. (1995). “Condorcet choice correspondences: A set-theoretical comparison”, *Mathematical Social Sciences* 30, 23–36.

Laffond, G., Lainé, J. y Laslier, J.F. (1996). “Composition-consistent tournament solutions and Social Choice Functions”, *Social Choice and Welfare,* 13, 75-93.

Laslier, J.F. (1996). “Rank-based Choice Correspondences”, *Economic Letters* 52, 279-286.

Le Breton M. y Truchon M. (1997). “A Borda measure for social choice functions”, *Mathematical Social Sciences* 34, 249-272.

Lepelley, D. y Merlin, V. (2001). ”Scoring run-off paradoxes for variable electorates”, *Economic Theory* 17, 53-80.

Lepelley, D. y Valognes, F. (2003). “Voting Rules, manipulability and social homogeneity”, *Public Choice* 116, 165-184.

Lerer, E. y Nitzan, S. (1985). "Some general results on the metric rationalization for Social Decision Rules", *Journal of Economic Theory* 37, 191-201.

Llamazares, B. (2004). "Simple and absolute special majorities generated by OWA operators", *European Journal of Operational Research* 158, 707-720.

Llamazares, B. y García-Lapresta, J.L. (2008). " Extension of Some Voting Systems to the Field of Gradual Preferences", en Springer Berlin / Heidelberg (Eds) *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models,* 297-315.

Marchant, T. (2003). "Towards a theory of MCDM; stepping away from social choice theory", *Mathematical Social Sciences* 45, 343–363.

Martínez-Panero, M. (2004). "Generalizaciones y Extensiones de la Regla de Votación de Borda", Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Massó, J. y Vorsatz M.(2008). "Weighted approval voting", *Economic Theory* 36, 129–146.

Maus S., Peters H. y Storcken T. (2007). "Minimal manipulability: Unanimity and nondictatorship", *Journal of Mathematical Economics* 43, 675-691.

May, J. M. (1952). "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision", *Econometrica* 20, 680-684.

May, R.M. (1971). "Some mathematical remarks on the paradox of voting", *Behavioral Science* 16, 143-151.

McLean, I., Urken, A. B., Hewitt, F. (1995). *Classics of Social Choice*. University of Michigan Press.

Meskanen T. y Nurmi H. (2005). "Measuring distance from consensus under various formulations of the social choice problem". *Group Decision and Negotiation* (GDN), Vienna.

Meskanen T. y Nurmi H. (2006). "Distance from consensus: a theme and variations, mathematics and democracy", en Simeone, B. y Pukelsheim (Eds.) *Mathematics and Democracy. Recent advances in voting systems and collective choice*. Springer, 117-132

Moulin, H. (1980). "On strategy-proofness and single peakedness", *Public Choice* 35, 437–455.

Moulin, H. (1988a). "Condorcet´s Principle implies the No Show Paradox", *Journal of Economic Theory* 45, 53-64

Moulin, H. (1988b). *Axioms of cooperative decision making*. Cambridge University Press, Cambridge.

Moulin, H. (1994). “Social Choice”, en Aumann, R.J. y Hart, S. (Eds.). *Handbook of Game Theory with Economic Applications* Vol. 2, Elsevier, North-Holland, 1091-1125.

Murakami Y. (1968). *The Logic of Social Choice*. Routledge and Kegan-Paul, London.

Nitzan, S. (1981). "Some Measures of Closeness to Unanimity and Their Implications," *Theory and Decision* 13, 129-38.

Nurmi, H. (1983). “Voting Procedures: a summary analysis”, *British Journal of Political Science* 13, 181-208.

Nurmi, H. (1987). *Comparing voting systems*. D. Reidel, Dordrecht.

Nurmi, H. (1999). *Voting paradoxes and how to deal with them*. Springer, Berlin.

Nurmi, H. (2004). “Consensus finding as distance mimimization”. En M.G. Dmitriev and A.P. Petrov (eds), Proceedings of the International Conference "Mathematical Modelling of Social and Economical Dynamics". Russian State Social University, Moscow, 223-237.

Pattanaik, P.K. (1973). “On the stability of sincere voting situations”, *Journal of Economic Theory*, 6, 558–574

Peress, M. (2004). “A comparison of alternative voting rules”, mimeo.

Pérez, J. (1991). *Propiedades de consistencia en los métodos de la decisión multicriterio discreta*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá.

Pérez, J. (1995). “Incidence of No Show Paradoxes in Condorcet Choice Functions”, *Investigaciones Económicas* 19, 139-154.

Pérez, J. (2001). “The strong No Show Paradoxes are a common flaw in Condorcet voting correspondences”, *Social Choice and Welfare* 18, 601-616.

Pérez, J. y Barba-Romero, S. (1995). “Three practical criteria of comparison among ordinal preference aggregating rules”, *European Journal of Operational Research* 85, 473–487.

Powers, R. C. (2005). “Posicional information and preference aggregation”, *Social Choice and Welfare* 24, 575-583.

Quesada, A. (2003). “Posicional independence in preference aggregation”, *Social Choice and Welfare* 20, 363–370.

Quesada, A. (2005). “Abstention as an escape from Arrow´s Theorem”, *Social Choice and Welfare* 25, 221–226.

Ratliff, T.C. (2003). “Some startling inconsistencies when electing committees”, *Social Choice and Welfare* 21, 433–454.

Regenwetter, M. y Tsetlin, I. (2004). "Approval voting and positional voting methods: Inference, relationship, examples", *Social Choice and Welfare* 22, 539-566.

Regenwetter, M., Grofman B., Marley A.A.J. y Tsetlin, I. (2006). *Behavioral social choice*. Cambridge University Press, Cambridge

Risse, M. (2005). “Why the count of Borda cannor beat de Marquis de Condorcet”, *Social Choice and Welfare* 25, 95–113.

Saari, D.G. (1988). “Conecting and Resolving Sen´s and Arrow´s Theorems”, *Social Choice and Welfare* 15, 239–261.

Saari, D.G. y Sieberg, K. (2001). “The sum of the parts can violate the whole”, *American Political Science Review* 95, 415–433.

Saari, D.G. (2006). “Which is better: The Condorcet or Borda winner”, *Social Choice and Welfare* 26, 107–129.

Salles, M. (2004), “La théorie du choix social : une introduction à quelques résultats fondamentaux”, en: *Leçons de philosophie économique*. Économica (Paris), Paris.

Salles, M. (2007). “The Theory of Voting and the Borda systems designing an all-inclusive democracy”, en Springer Berlin Heidelberg (Eds.).*Consensual Voting Procedures For Use in Parliaments, Councils and Committees*, 99-108.

Sanver, R. y Zwicker, W.S. (2007). "One-way monotonicity as a form of strategy-proofness" (2006).

Smith, D.A. (1999). “Manipulability measures of common Social Choice Functions”, *Social Choice and Welfare* 16, 639-661.

Smith, J. (1973). “Aggregation of preferences with a variable electorate”, *Econometrica* 41, 1027-1041.

Schwartz, T. (1972). “Rationality and the myth of the maximum”. *Nouˆs* 6, 97–117.

Taylor, A.D. (2005). *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*. Cambridge University Press, UK.

Vickrey, W. (1960) “Utility, strategy and social decision rules”, *Quarterly Journal of Economics* 74, 507–535.

Yeh, C. (2008). “An efficiency characterization of plurality rule in collective choice problems”, *Economic Theory* 34, 575–583.

Young, H.P. (1974). “An axiomatization of the Borda rule”, *Journal of Economic Theory* 9, 43-52.

Young, H.P. (1975). “Social choice scoring functions”, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 28, 824-838.

Young, H.P. (1988). “Condorcet's Theory of Voting”, *American Political Science Review* 82, 1231-1244.

Young, H.P. y Levenglick, A. (1978). “A consistent extension of Condorcet election principle”, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35, 285-300.